6. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 22. & 23. Nov 2005 / GG

Ein Anfangsrandwertproblem zu $\Box A = 0$ auf $\mathbb{R} \times (0, L)$:
Fouriers Lösungsmethode für die eingespannte Saite

1. Bestimmen Sie eine Funktion $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R} \times (0, L) : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A = 0$ und

   (a) $lim_{x \downarrow 0} A\,(t, x) = lim_{x \uparrow L} A\,(t, x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (homogene Dirichlet'sche Randbedingung),

   (b) $A(0, x) = u(x) := aL \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$ und $\partial_t A(0, x) = v(x) := 2\pi bc \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$ für alle $x \in (0, L)$. Es gelte $a, b \in \mathbb{R}$. (Anfangsbedingung).

   Beachten Sie, dass $lim_{x \downarrow 0} v\,(x) = lim_{x \uparrow L} v\,(x) = 0$ und $\lim_{x \downarrow 0} u''\,(x) = lim_{x \uparrow L} u''\,(x) = 0$. Warum ist das von Bedeutung?

   Lösung:

   $$A(t, x) = L \left\{ a \cos\left(\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + b \sin\left(2\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \right\}.$$

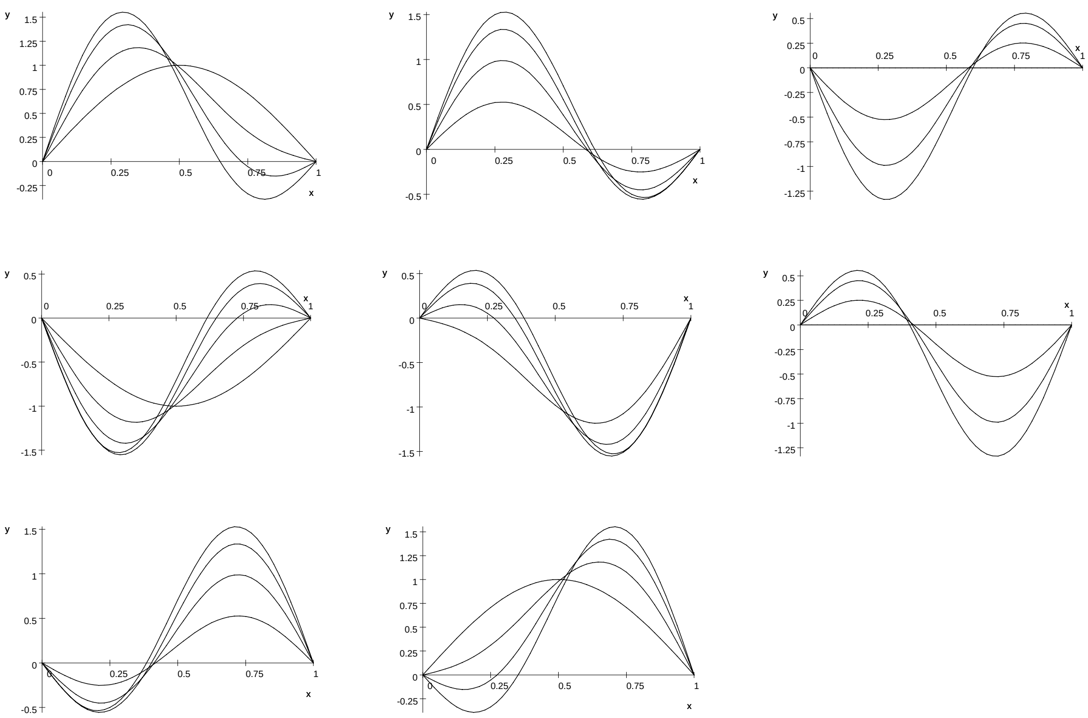
   Gibt es weitere Lösungen A? Ist für festes x die Abbildung $t \mapsto A\,(t, x)$ periodisch? Falls ja, hängt die (kleinste) Periode von x ab?

2. Zeigen Sie für die Gesamtenergie[1] E_A der Lösung A von Aufgabe 1, dass

   $$E_A(t) := \frac{\rho}{2} \int_0^L \left[\left(\partial_t A\,(t, x)\right)^2 + \left(c \partial_x A\,(t, x)\right)^2 \right] dx = \frac{\rho L}{2} c^2 \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(a^2 + 4b^2\right).$$

   Hinweis: Benützen Sie dass, $E_A(t) = E_A(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

   Moral: Der Beitrag einer Eigenmode zur Gesamtenergie einer Schwingung ist den Quadraten von Modenamplitude und Modenfrequenz proportional. Hier noch einige Momentaufnahmen der Schwingung A/L für $ct/L = n/16$ für $n = 0, 1, 2, \ldots 32$ und für $a = b = 1$.



[1] Die Konstante $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Masse der Saite pro Längeneinheit, wenn $A(t, x)$ ihre Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit t über dem Ruheort x angibt.