5. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 14. & 15. Nov 2005 / GG

$\Box A = j$ für einige ausgewählte Quellen j: Lösung durch Ansatz

1. *Statische Trommelmembran:* Sei $j(t,x) = 1$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^3$. Ansatz: Sei $A \in C^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ so, dass eine Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, dass $A(t,x) = g(|x|)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^2 \setminus 0\right)$. Zeigen Sie, dass $\Box A = j$ auf $\mathbb{R}^3$ mit der Randbedingung $A(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R \in \mathbb{R}_{>0}$ genau dann gilt, wenn $g(r) = \left(R^2 - \langle x, x\rangle\right)/4$.

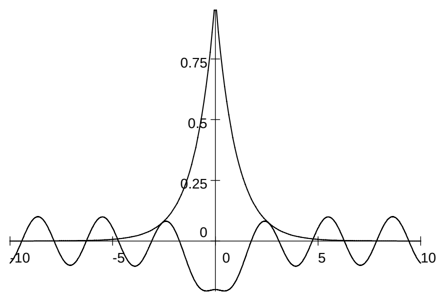
   Moral: Es ist dies ein Beispiel für ein statisches Randwertproblem. Es sagt im Rahmen der Elastomechanik, dass eine homogen belastete Kreismembran die Form eines Rotationsparaboloids annimmt. Spannen Sie eine Frischhaltefolie straff über ein mit etwas Wasser gefülltes Glas und erhitzen Sie es kurz im Mikrowellenofen. Warten Sie danach die Abkühlung ab.

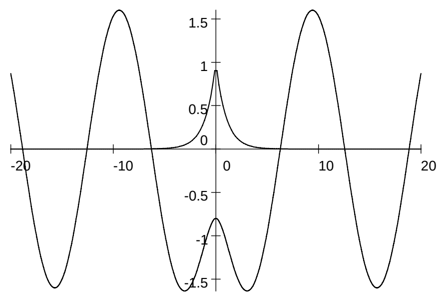
2. *Erzwungene Schwingung eines langen Seils:* Für $\omega, \kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $j(t,x) = \sin(\omega t)\exp(-\kappa|x|)$. Kontrollieren Sie, dass mit $k := \omega/c$

   $$A_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ mit } A_p(t,x) = -\frac{1}{k^2+\kappa^2}\sin(\omega t)\left\{\exp(-\kappa|x|) + \frac{\kappa}{k}\sin(k|x|)\right\}$$

   trotz des Auftretens von $|\cdot|$ eine $\mathcal{C}^2$-Lösung von $\Box A = j$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie alle $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ des Ansatztyps $A(t,x) = \sin(\omega t) f(x)$ mit $\Box A = j$.[1] Geben Sie alle $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A = j$ an.

   Moral: A_p ist für große $|x|$ annähernd eine Sinus-Stehwelle mit der Wellenzahl k und der Amplitude $\kappa^{-2}\frac{\kappa}{k}\left(1 + \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2\right)^{-1}$. Das linke Bild zeigt $\kappa^2 A_p(t,\cdot)$ und $j(t,\cdot)$ für $k = 2\kappa$ zur Zeit t mit $\omega t = \pi/2$ als Funktion von κx. Das rechte Bild zeigt $\kappa^2 A_p(t,\cdot)$ und $j(t,\cdot)$ für $k = \kappa/2$ zur Zeit t mit $\omega t = \pi/2$ als Funktion von κx.





   Es gilt

   $$A_p(t,x) = -\frac{1}{k^2+\kappa^2}\left\{\sin(\omega t)\exp(-\kappa|x|) + \frac{\kappa}{k}\cos(k|x| - \omega t) - \frac{\kappa}{k}\cos(\omega t)\cos(kx)\right\}.$$

   Der letzte Teil ist eine Stehwellenlösung der homogenen Gleichung, sodass die beiden ersten Terme

   $$\widetilde{A}_p(t,x) := -\frac{1}{k^2+\kappa^2}\left\{\sin(\omega t)\exp(-\kappa|x|) + \frac{\kappa}{k}\cos(k|x| - \omega t)\right\}$$

   eine Lösung von $\Box A = j$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ bilden. Diese „Ausstrahlungslösung" $\widetilde{A}_p$ enthält eine von der Quelle in beide Richtungen ausgehende Welle.

[1] Hinweis: Nutzen Sie die Variation der Konstantenformel für die Schwingungsgleichung.