d'Alemberts Wellengleichung auf $\mathbb{R}^2$ mit Quelle: Duhamels Lösungsformel

1. Sei $j \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ und $\Box A = j$ mit $A(0,x) = 0 = \partial_t A(0,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$A(t,x) = \frac{c}{2} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} j(s,\xi)\, d\xi \right) ds$$

(Duhamels Lösungsformel) für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Zeigen Sie: Falls $j(t,-x) = \varepsilon j(t,x)$ für ein $\varepsilon \in \{1,-1\}$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, gilt auch $A(t,-x) = \varepsilon A(t,x)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Zeigen Sie: Falls $j(-t,x) = \varepsilon j(t,x)$ für ein $\varepsilon \in \{1,-1\}$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, gilt auch $A(-t,x) = \varepsilon A(t,x)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Moral: Eine Spiegelungssymmetrie der Quelle überträgt sich auf die Lösung mit homogener Anfangsbedingung.

2. (Optional) Zeigen Sie für die durch Duhamels Formel gegebene Funktion A, dass $\Box A = j$ gilt.

3. Sei nun $j(t,x) = g(t)\delta(x)/cT$ mit $T > 0$ und mit $g, \delta \in \mathcal{C}(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Die Funktion δ sei gerade, sei nur in einer 'kleinen' Umgebung von 0 ungleich Null und es gelte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi)\, d\xi = 1.$$

Approximieren Sie (unqualifiziert) für $t > s > 0$ und für $x > 0$ so:

$$\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \delta(\xi)\, d\xi \simeq \begin{cases} 1 & \text{für } x + c(t-s) > 0 \text{ und } x - c(t-s) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   (a) Schließen Sie daraus, dass für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$

$$A(t,x) \simeq A_p(t,x) := \frac{1}{2T} G\left(t - \frac{|x|}{c}\right) \Theta\left(t - \frac{|x|}{c}\right),$$

   wobei $G(t) := \int_0^t g(s)\, ds$ für $t \in \mathbb{R}$, und Heaviside's Stufenfunktion durch

$$\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   gegeben ist.

   (b) Analog zeigen Sie für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit $t < 0$

$$A(t,x) \simeq A_p(t,x) := -\frac{1}{2T} G\left(t + \frac{|x|}{c}\right) \Theta\left(-\left(t + \frac{|x|}{c}\right)\right).$$

   (c) Zeigen Sie, dass $A_p(t,x) = 0$ für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit $c^2 t^2 < x^2$. Zeigen Sie weiter: Im Rückwärtskegel von $(0,0)$ ist A_p einlaufend und im Vorwärtskegel von $(0,0)$ auslaufend.

   (d) Physikalisch besonders wichtig ist der Fall, dass die Quelle j vor dem Zeitpunkt, zu dem die homogene Anfangsbedingung gilt, nur den Wert 0 annimmt. Es gilt also $g(t) = 0$ für alle $t < 0$. Dann heißt g/cT Sendersignal (einer räumlich begrenzten Quelle) und die Abbildung $t \mapsto A(t,x)$ heißt Empfängersignal am Ort x. Zeigen Sie, dass dann für alle $t, x \in \mathbb{R}$

$$A_p(t,x) = \frac{1}{2T} G\left(t - \frac{|x|}{c}\right)$$

   gilt. Das Empfängersignal ist also (annähernd) einer um die Laufzeit $|x|/c$ in positive Richtung verschobene Stammfunktion des Sendersignals proportional. Und zwar jener Stammfunktion, die bei $t = 0$ gleich 0 ist. Die Stärke des Empfängersignals nimmt mit der Entfernung zwischen Sender und Empfänger nicht ab! Hier ein Beispiel:

$$g\left(t\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) & \text{für } 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt

$$\frac{G(t)}{2T} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{4\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) & \text{für } 0 < t < T/2 \\ \frac{1}{2\pi} & \text{für } T/2 < t \end{cases} .$$

Die Figur 1 zeigt g (schwarz) und $t \mapsto G(t - |x|/c)$ (rot) für $T = 2$ und $|x|/c = 3/2$.

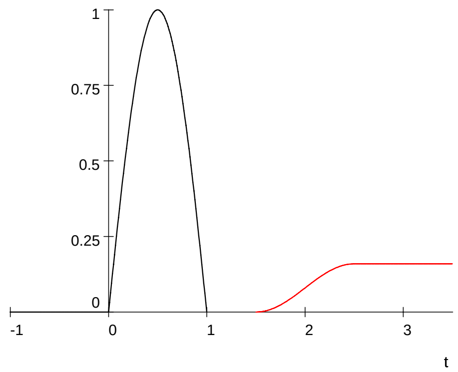

Figure 1: Laufzeitverzögerung zwischen Sender und Empfänger

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass A_p mehr als eine unkontrollierte Approximation der exakten Lösung ist. A_p ist eine „distributionelle" Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu einer zeitabhängigen Dirac'schen Punktquelle. Für $t < 0$ liegt die avancierte Lösung zur Quelle $\Theta\left(-t\right) j(t,x)$ und für $t > 0$ liegt die retardierte Lösung zur Quelle $\Theta\left(t\right) j(t,x)$ vor.