3. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 24. & 25. Oktober 2005 / GG

---

d'Alemberts Wellengleichung auf $\mathbb{R}^4$: Kugelwellen

1. Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}, x \mapsto f(|x|) / |x|$. Zeigen Sie $(\Delta\phi)(x) = f''(|x|) / |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$.

2. Sei $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $A : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \psi(t, |x|) / |x|$. Zeigen Sie, dass $\Box A = 0$ genau dann auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ gilt, wenn $\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_r^2\right)\psi = 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Zur lokalen Lösung A existieren also zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$, sodass $A = A_{f,g}$ mit

$$A_{f,g}(t, x) := \frac{1}{|x|}\left[f(|x| - ct) + g(|x| + ct)\right]$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus 0)$. Lokale Lösungen $A_{f,0}$ (resp. $A_{0,g}$) heißen auslaufend (resp. einlaufend). Warum? I.A. hat $A_{f,g}$ keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$ und ergibt daher keine globale Lösung von $\Box A = 0$. Warum? Die Figur 1 zeigt $x \mapsto A_{f,0}(t, x, 0, 0)$ mit $f(x) = 1/(1 + x^2)$ für $t \in \{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$ im Bereich $1 < x < 15$.

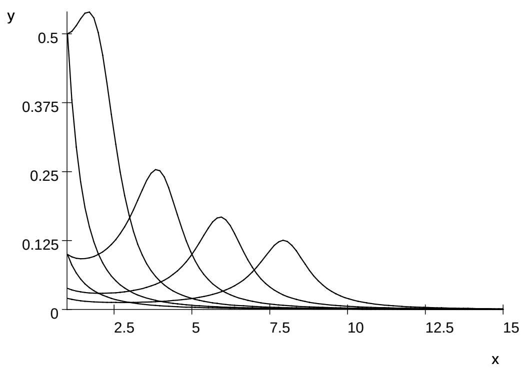

Figure 1: Momentaufnahmen einer auslaufenden lokalen Lösung von $\Box A = 0$

3. Für die Funktionen f und g in Beispiel 2 gelte nun $f(x) = -g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $A_{f,g}$ eine (eindeutige) stetige Fortsetzung $\widetilde{A}_g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ hat. Es gilt sogar (ohne Beweis) $\widetilde{A}_g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4 : \mathbb{R})$ und $\Box\widetilde{A}_g = 0$ auf $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie g so, dass $\widetilde{A}_g(0, x) = 0$ und $\partial_1 \widetilde{A}_g(0, x) = \frac{1}{\tau L^2}|x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, und leiten Sie daraus für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ab, dass

$$\widetilde{A}_g(t, x) = \frac{1}{L^2}\left(\frac{t}{\tau}\right)\left(c^2 t^2 + |x|^2\right)$$

gilt. Dabei sei $\tau L^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Kontrollieren Sie, dass $\Box\widetilde{A}_g = 0$ gilt.

Bemerkung: Figur 2 zeigt eine physikalisch realistischere Lösung als die eben berechnete. Sie zeigt die Graphen von $x \mapsto \widetilde{A}_g(t, (x, 0, 0))$ für $g(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ zu den Zeiten $ct = -5, -2, -1$. Zwei höher werdende Hügel laufen aufeinander zu und überlagern zu einem hohen Berg. Figur 3 zeigt die analogen Graphen zu den Zeiten $ct = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}$. Ein Durchschwingen durch die Nullfunktion findet bei $t = 0$ statt. Bilder für $t > 0$ erübrigen sich wegen $\widetilde{A}_f(t, \cdot) = -\widetilde{A}_f(-t, \cdot)$. Ein tiefer Graben um 0 zerfällt in zwei auseinanderlaufende und seichter werdende Mulden. (Ein Beispiel einer Kugelwelle endlicher Energie.)

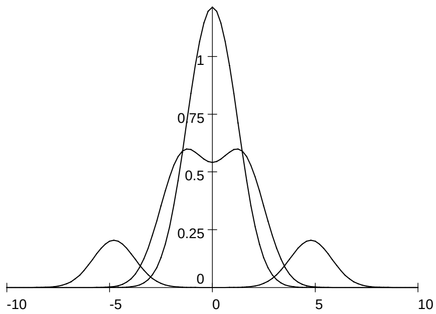

Figure 2: Eine Kugelwelle läuft zum Ursprung

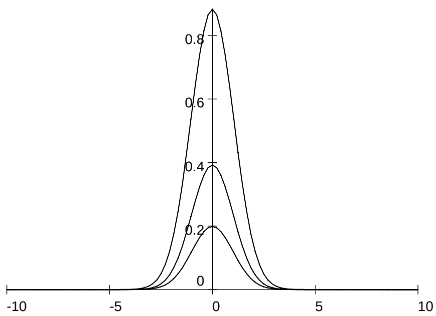

Figure 3: Der von der Kugelwelle aufgebaute Berg wird zum Tal