d'Alemberts Wellengleichung auf $\mathbb{R}^2$: Anfangswertprobleme

1. Bestimmen Sie die Lösung $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ der Wellengleichung $\Box A = 0$ mit den Anfangsbedingungen $A(0,x) = u(x) := \cos(k_0 x)\exp\left(-x^2/\left(2a^2\right)\right)$ und $\partial_t A(0,x) = 0$. Dabei seien $a^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $k_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Lösung:
$$A(t,x) = \frac{1}{2}\left\{\cos\left(k_0\left(x-ct\right)\right)\exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{2a^2}\right) + \cos\left(k_0\left(x+ct\right)\right)\exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{2a^2}\right)\right\}$$
Warum gilt $A(t,-x) = A(t,x)$? Warum gilt $A(-t,x) = A(t,x)$? Zeigen Sie weiter, dass
$$A(t,x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \cos(ckt)\cos(kx)\left(e^{-\frac{a^2}{2}(k-k_0)^2} + e^{-\frac{a^2}{2}(k+k_0)^2}\right)dk.$$
Welche Fouriertransformierte hat die Abbildung $A(\cdot,x) : t \mapsto A(t,x)$? Welche Anfangsdaten hat die Lösung $(t,x) \mapsto u(x-ct)$ bei $t=0$? Figur 1 zeigt den Graphen von A für $c=1, k_0=2$ und $a=1$ im Bereich $t,x \in (-4,4)$. Figur 2 zeigt als Momentaufnahemen die Graphen von $A(0,\cdot)$ und von $A(10,\cdot)$ für $c=1, k_0=5$ und $a=1$.

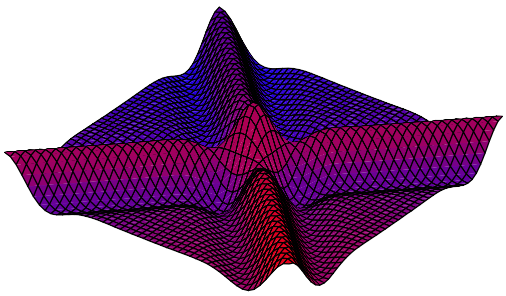

Figure 1: Zwei einander ungestört durchdringende Paketlösungen der Wellengleichung

2. Bestimmen Sie die Lösung von d'Alemberts Wellengleichung in $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit den Anfangsbedingungen $A(0,x) = 0$ und $\partial_t A(0,x) = \exp\left(-x^2/\left(a^2\right)\right)/\tau$. Es seien $a^2, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$. Diese Lösung heißt Hammerschlaglösung. Warum? Warum gilt $A(t,-x) = A(t,x)$? Warum gilt $A(-t,x) = -A(t,x)$? Die Abbildung zeigt die Graphen von $A(t,\cdot)$ für $t = \pm 1/2, \pm 2, \pm 5$ und für $a = c = 1$ und $\tau = \sqrt{\pi}/2$. Wo konzentriert sich die Energiedichte von A zur Zeit t?

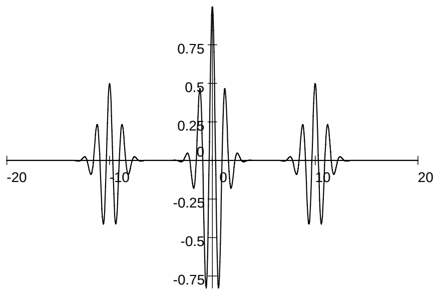

Figure 2: Schnappschüsse der Interferenz

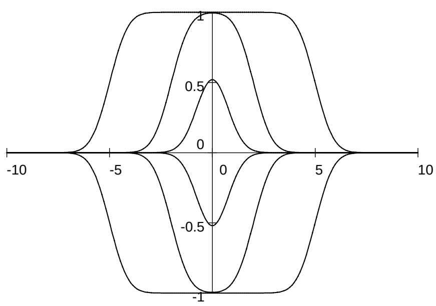

Figure 3: Momentaufnahmen der Hammerschlaglösung

$$\frac{\operatorname{erf}(x+y)-\operatorname{erf}(x-y))}{2}$$