9. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 13. & 14. Dez 2004 / GG

Symmetrien einer partiellen DiffG: die Lorentzinvarianz[1] von $\Box$

1. Für $A \in C^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ gilt in der Karte $\chi = \left(\chi^0, \chi^1\right)^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\chi^0(t,x) = ct$ und $\chi^1(t,x) = x$ dass $\Box A = \left(\partial_0^\chi\right)^2 A - \left(\partial_1^\chi\right)^2 A$. Die Galilei-Bewegungsabbildung $\Gamma_\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zur Geschwindigkeit $v = c\beta \in \mathbb{R}$ ist implizit durch

$$\chi \circ \Gamma_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \chi = g_\beta \cdot \chi$$

gegeben. Für die mitbewegte Karte $\Gamma_\beta * \chi := \chi \circ \Gamma_\beta^{-1}$ gilt offenbar $(\Gamma_\beta * \chi) \circ \Gamma_\beta = \chi$ und somit $\chi = g_\beta \cdot \Gamma_\beta * \chi$. Die Lorentz-Bewegungsabbildung $\Lambda_\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zur Geschwindigkeit $v = c\beta \in (-c, c)$ ist implizit durch

$$\chi \circ \Gamma_\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \chi = l_\beta \cdot \chi$$

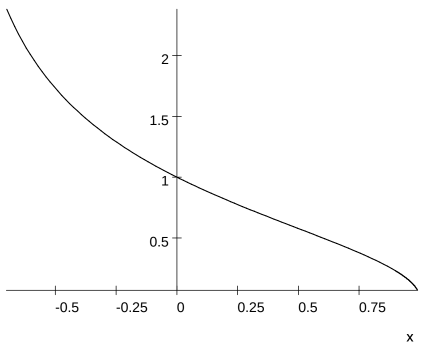
gegeben. Für die mitbewegte Karte $\Lambda_\beta * \chi := \chi \circ \Lambda_\beta^{-1}$ gilt offenbar $(\Lambda_\beta * \chi) \circ \Lambda_\beta = \chi$ und somit $\chi = l_\beta \cdot \Lambda_\beta * \chi$. Sei $C_{\omega,k} \circ \chi = \cos\left(\frac{\omega}{c}\chi^0 - k\chi^1\right)$ auf $\mathbb{R}^2$ mit $\omega, k \in \mathbb{R}$ und $\omega \geq c\,|k|$. Für die Funktion $A := C_{\omega,k} \circ \chi$ gilt $\Box A = 0$ genau dann, wenn $\omega = c\,|k|$.

   (a) Passiver Galilei'scher Dopplereffekt: Zeigen Sie, dass $C_{\omega,k} \circ \chi = C_{\omega',k'} \circ (\Gamma_\beta * \chi)$ mit $\omega' = |\omega - kc\beta|$ und $k' = k \cdot sgn\,(\omega - kc\beta)$.

   (b) Passiver Einstein'scher Dopplereffekt[2]: Zeigen Sie, dass $C_{\omega,k} \circ \chi = C_{\omega',k'} \circ (\Lambda_\beta * \chi)$ mit

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\omega - c\beta k\right] \text{ und } k' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[k - \frac{\beta}{c}\omega\right].$$

   Rechnen Sie im Spezialfall $\omega = c\,|k|$ und $k > 0$ nach, dass mit $\beta = \tanh(\alpha)$ folgt $\omega'/\omega = k'/k = \sqrt{(1-\beta)(1+\beta)^{-1}} = \exp(-\alpha)$.



$x \mapsto \sqrt{(1-x)/(1+x)}$

2. Für $A = A^\chi \circ \chi \in C^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ sei $\Lambda_\beta * A := A \circ \Lambda_\beta^{-1}$. Zeigen Sie, dass $\Lambda_\beta * A = A^\chi \circ (\Lambda_\beta * \chi)$. Zeigen Sie, dass $\Box\left(\Lambda_\beta * A\right) = \Lambda_v * (\Box A)$ für alle $A \in C^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ und für alle $\beta \in (-1, 1)$.[3] Dieser Sachverhalt wird als Lorentzinvarianz[4] von $\Box$ bezeichnet. Insbesondere folgt aus $\Box A = j$, dass $\Box\left(\Lambda_\beta * A\right) = \Lambda_\beta * j$. Erst recht gilt: $\Box A = 0 \Rightarrow \Box\left(\Lambda_\beta * A\right) = 0$.

---

[1] Zur Feier von 100 Jahren Relativitätstheorie!

[2] Im Einstein'schen Fall gilt also für $\omega = c\,|k|$ auch $\omega' = c\,|k'|$. Deshalb ist mit $C_{\omega,k} \circ \chi$ auch $C_{\omega',k'} \circ \chi$ eine Lösung der dAWG. Gilt analoges im Galilei'schen Fall? (Nein) Einstein abstrahierte aus der erfolglosen Suche nach einem Äther-ruhsystem für Licht die Hypothese, dass $\omega' = c\,|k'|$ (für alle β) und zog daraus den Schluss, dass $\Lambda_\beta * \chi$ und nicht $\Gamma_\beta * \chi$ die der „Elektrodynamik bewegter Körper"angepasste inertiale Karte ist. Sie gibt Dauern und instantane Abstände direkt wieder. (A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik, **17**, 1905)

[3] Daraus folgt: Die (lineare) Abbildung $\Lambda_\beta * : C^\infty\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right) \to C^\infty\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ kommutiert mit dem Differentialoperator $\Box$.

[4] H. A. Lorentz, *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*, Proc. Acad. Sc. Amsterdam **6**, 1904