7. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 29. & 30. Nov 2004 / GG

Sphärische Separation der Helmholtzgleichung: Besselsche Funktionen

1. Sei $g \in C^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ eine Funktion, für die ein $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ und eine dehnungsinvariante Funktion $Y : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ existieren, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$

$$g(x) = \frac{h(|x|)}{\sqrt{|x|}} Y(x)$$

gilt. Aus $\Delta g = -g$ folgt dann (siehe Vorlesung), dass ein $l \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ die Besselsche Differentialgleichung zum Parameter $\nu^2 = (l + 1/2)^2$ gilt:

$$h''(x) + \frac{1}{x} h'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) h(x) = 0.$$

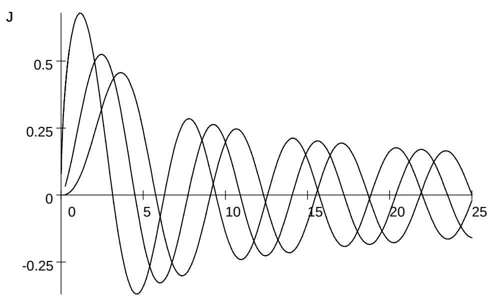
Zusätzlich gilt die Randbedingung, dass die Abbildung $x \mapsto h(x)/\sqrt{x}$ eine stetige Fortsetzung nach $x = 0$ hat. Zeigen Sie mithilfe des Frobeniusansatzes

$$h(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

mit $c_0 \neq 0$, dass die Besselsche Differentialgleichung zu $\nu^2 > 0$ die beiden Lösungen[1] J_ν und $J_{-\nu}$ mit $\nu := \sqrt{\nu^2} \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{N}$ hat.

$$J_{\pm\nu}(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+1\pm\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Von den beiden Funktionen $J_{\pm\left(l+\frac{1}{2}\right)}$ erfüllt nur $J_{l+\frac{1}{2}}$ die Randbedingung bei 0. Warum? Die Abbildung zeigt $J_{l+\frac{1}{2}}$ für $l = 0, 1$ (strichliert), 2.



2. Zeigen Sie, dass $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x)$ für alle $x > 0$. Hinweis: Es gilt (siehe Vorlesung)

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{n! 2^{2n}}$$

[1] Die Potenzreihen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ lokal gleichmäßig konvergent. Die Potenzfunktionen $x \mapsto x^{\pm\nu}$ sind im Fall $\nu \notin \mathbb{Z}$ vorläufig nur für $x > 0$ durch $x^{\pm\nu} = \exp(\pm\nu \ln(x))$ erklärt.