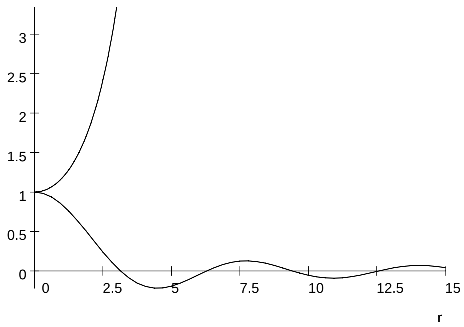
6. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 22. & 23. Nov 2004 / GG

Alle drehinvarianten $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$- Eigenfunktionen von Δ
Eigenschwingungen eines Randwertproblems zu $\Box A = 0$ auf $\mathbb{R}\times\left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\right\}$

1. Sei $g \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ so, dass ein $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = h(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert. Bestimmen Sie die Menge aller solchen Funktionen g mit $\Delta g = \lambda g$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Lösung:
   (a) Für $\lambda > 0$ gilt $\Delta g = \lambda g$ auf $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn ein $A \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $g(x) = A \sinh\left(\sqrt{\lambda}\,|x|\right) / |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$.[1]
   (b) $\lambda = 0$: Es gilt $\Delta g = 0$ auf $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn ein $A \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $g(x) = A$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
   (c) Für $\lambda < 0$ gilt $\Delta g = \lambda g$ auf $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn ein $A \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $g(x) = A \sin\left(\sqrt{-\lambda}\,|x|\right) / |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$.



Graphen von $\sinh(r)/r$ (strichliert) und von $\sin(r)/r$

2. Benützen Sie die Funktionen g aus Beispiel 1, um Funktionen $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ des Typs $A(t, x) = f(t)g(x)$ mit $\Box A = 0$ zu konstruieren. Welche davon sind periodisch in t? Lösung: Für $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gilt eine der folgenden Aussagen
   (a) $A(t, x) = [\alpha \exp(ckt) + \beta \exp(-ckt)] \sinh(k\,|x|) / |x|$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus 0$ mit $k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Aperiodisch in t)
   (b) $A(t, x) = \alpha + \beta t$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Aperiodisch in t)
   (c) $A(t, x) = [\alpha \cos(ckt) + \beta \sin(ckt)] \sin(k\,|x|) / |x|$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus 0$ mit $k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Periodisch in t)

   Wie passen die drei Lösungstypen zu den Lösungen von Beispiel 3 von Blatt 3?

3. Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Für welche der Funktionen $A \neq 0$ aus Beispiel 2 gilt die (homogene) Dirichlet'sche Randbedingung $A(t, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| = R$? Lösung: Nur Funktionen des Typs c) mit $kR \in \pi \cdot \mathbb{N}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Mit welchen „Eigenfrequenzen“ schwingen diese Funktionen?

[1] Die Positivität von $-\Delta$ gilt somit *nicht* auf $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$.