5. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 15. & 16. Nov 2004 / GG

d'Alemberts Wellengleichung : Lösungen mit Quelle

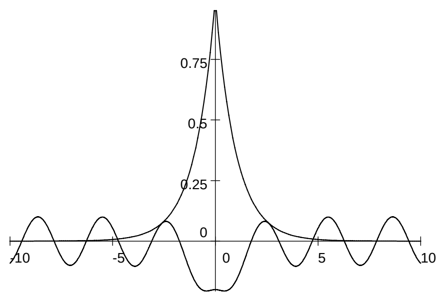
1. Sei f die konstante Funktion auf $\mathbb{R}^3$, die jedem Punkt den Wert $f_0 \in \mathbb{R}$ zuordnet, und sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $A \in C^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ so, dass eine Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, dass $A(t,x) = g\left(|x|\right)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^2 \setminus 0\right)$. Zeigen Sie, dass $\Box A = -f$ auf $\mathbb{R}^3$ und $A(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R$ genau dann gilt, wenn $g(r) = -f_0\left(R^2 - \langle x,x\rangle\right)/4$. (Statische Lösung der homogen belasteten Kreismembran; Parabolspiegel)

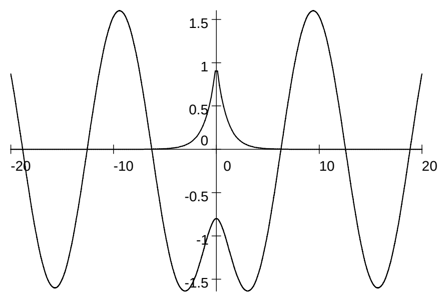
2. Für $\omega, \kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $j(t,x) = \sin(\omega t)\exp(-\kappa|x|)$. Kontrollieren Sie, dass mit $k := \omega/c$

$$A_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \text{mit}\ A_p(t,x) = -\frac{1}{k^2+\kappa^2}\sin(\omega t)\left\{\exp(-\kappa|x|) + \frac{\kappa}{k}\sin(k|x|)\right\}$$

trotz des Auftretens von $|\cdot|$ eine $\mathcal{C}^2$-Lösung von $\Box A = j$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist. Geben Sie alle $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ des Typs $A(t,x) = \sin(\omega t) f(x)$ mit $\Box A = j$ an. Geben Sie alle $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A = j$ an. Wie können Sie obiges A_p selbst finden?[1]

Diskussion: A_p ist für große $|x|$ annähernd eine Sinus-Stehwelle mit der Wellenzahl k und der Amplitude $\kappa^{-2}\frac{\kappa}{k}\left(1+\left(\frac{k}{\kappa}\right)^2\right)^{-1}$. Das linke Bild zeigt $\kappa^2 A_p(t,\cdot)$ und $j(t,\cdot)$ für $k = 2\kappa$ zur Zeit t mit $\omega t = \pi/2$ als Funktion von κx. Das rechte Bild zeigt $\kappa^2 A_p(t,\cdot)$ und $j(t,\cdot)$ für $k = \kappa/2$ zur Zeit t mit $\omega t = \pi/2$ als Funktion von κx.





Es gilt

$$A_p(t,x) = -\frac{1}{k^2+\kappa^2}\left\{\sin(\omega t)\exp(-\kappa|x|) + \frac{\kappa}{k}\cos(k|x| - \omega t) - \frac{\kappa}{k}\cos(\omega t)\cos(kx)\right\}.$$

Der letzte Teil ist eine Stehwellenlösung der homogenen Gleichung, sodass die beiden ersten Terme

$$\widetilde{A}_p(t,x) := -\frac{1}{k^2+\kappa^2}\left\{\sin(\omega t)\exp(-\kappa|x|) + \frac{\kappa}{k}\cos(k|x| - \omega t)\right\}$$

eine Lösung von $\Box A = j$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ bilden. Diese „Ausstrahlungslösung" $\widetilde{A}_p$ enthält eine von der Quelle in beide Richtungen ausgehende Welle.

[1] Hinweis: Nutzen Sie die Variation der Konstantenformel für die Schwingungsgleichung.