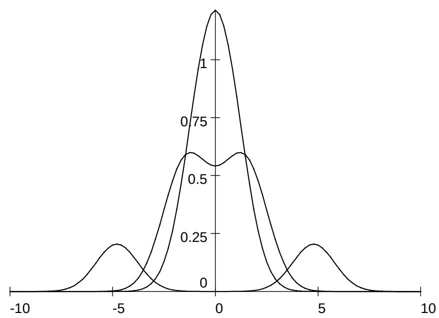
4. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 8. & 9. November 2004 / GG

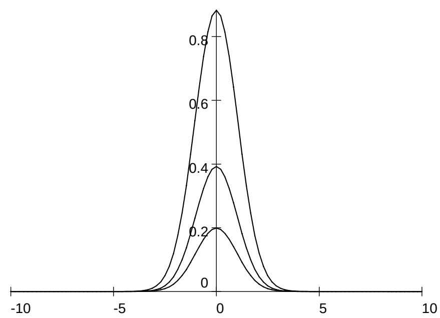
d'Alemberts Wellengleichung: Kugelwellen, Kirchhoffs Lösungsformel

1. Sei nun in Beispiel 3 von Blatt 3 die Funktion $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und $f(x) = -(\Pi g)(x) := -g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Kugelwelle $A_{-\Pi g, g}$ eine (eindeutige) stetige Fortsetzung $\widetilde{A}_g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hat. Sie ist sogar in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \mathbb{R})$ und es gilt $\Box \widetilde{A}_g = 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Lösung $\widetilde{A}_g$, zur Anfangsbedingung $\widetilde{A}_g(0,x) = 0$ und $\partial_1 \widetilde{A}_g(0,x) = \frac{1}{\tau L^2} |x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Dabei ist $\tau L^2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Lösung:

$$\widetilde{A}_g(t,x) = \frac{1}{L^2}\left(\frac{t}{\tau}\right)\left(c^2t^2 + |x|^2\right).$$

Das Bild zeigt eine physikalisch realistischere Lösung. Es zeigt die Graphen von $x \mapsto \widetilde{A}_g(t,(x,0,0))$ für $g(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ zu den Zeiten $ct = -5, -2, -1$. Zwei höher werdende Hügel wandern aufeinander zu und überlagern zu einem hohen Berg. Das rechte Bild zeigt die analogen Graphen zu den Zeiten $ct = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}$. Ein Durchschwingen durch die Nullfunktion findet bei $t = 0$ statt. Bilder für $t > 0$ erübrigen sich wegen $\widetilde{A}_f(t,\cdot) = -\widetilde{A}_f(-t,\cdot)$. Ein tiefer Graben um 0 zerfällt in zwei auseinanderlaufende und seichter werdende Mulden.





2. In Aufgabe 1 haben Sie gezeigt, dass die Funktion $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \mathbb{R})$ mit $\Box A = 0$ und der Anfangsbedingung $A(0,x) = u(x) := 0$ und $\partial_1 A(0,x) = v(x) := \frac{1}{\tau L^2}|x|^2 \; \forall x \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A(t,x) = \frac{t}{\tau}\left(\frac{c^2t^2 + |x|^2}{L^2}\right). \tag{1}$$

gegeben ist. ($\tau L^2 \in \mathbb{R}_{>0}$) Leiten Sie Gleichung (1) aus Kirchhoffs Lösungsformel

$$A(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} v(x + c|t|n)d_n\Omega + \partial_t\left[\frac{t}{4\pi}\int_{S^2} u(x + c|t|n)d_n\Omega\right]$$

mit $S^2 := \left\{n \in \mathbb{R}^3 : |n| = 1\right\}$ ab. Hinweis: Es genügt die Berechnung von $A(t,(0,0,r))$ für $r \geq 0$. Warum?