3. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 25. Oktober 2004 / GG

---

d'Alemberts Wellengleichung: 3d Lösungen mit Symmetrien, z.B. Kugelwellen

1. Bestimmen Sie die Funktion $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \mathbb{R}\right)$ mit
$$\Box A := \left(\frac{1}{c^2}\partial_1^2 - \sum_{i=2}^{4}\partial_i^2\right) A = 0$$
und $A(0,x) = 0$ und $\partial_1 A(0,x) = \frac{x^1}{\tau L}$ für alle $x = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3$. Hier ist $\tau, L \in \mathbb{R}_{>0}$. Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz $A\left(t,x\right) = f(t, x^1)$ mit $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$.

2. Sei $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R}\right)$ und $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}, x \mapsto f\left(|x|\right) / |x|$. Zeigen Sie $\left(\Delta\phi\right)(x) = f^{''}\left(|x|\right) / |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$. Hinweis: Verwenden Sie Δ in Kugelkoordinaten.

3. Sei $\psi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R}\right)$ und $A : \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right) \to \mathbb{R}, x \mapsto \psi\left(t, |x|\right) / |x|$. Zeigen Sie, dass $\Box A = 0$ genau dann auf $\mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$gilt, wenn $\left(\frac{1}{c^2}\partial_1^2 - \partial_2^2\right)\psi = 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Eine solche Funktion A heißt Kugelwelle. Zu jeder Kugelwelle A existieren also zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R} : \mathbb{R}\right)$, sodass $A = A_{f,g}$ mit
$$A_{f,g}(t,x) := \frac{1}{|x|}\left[f\left(|x| - ct\right) + g\left(|x| + ct\right)\right]$$
für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$. Kugelwellen $A_{f,0}$ heißen auslaufend und Kugelwellen $A_{0,g}$ heißen einlaufend. Warum? I.A. hat $A_{f,g}$ keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$. Warum?