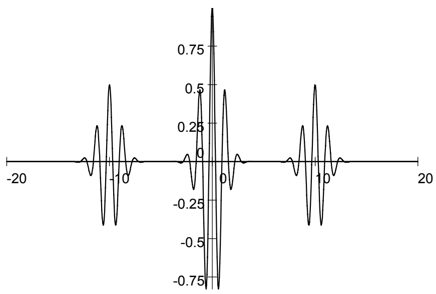
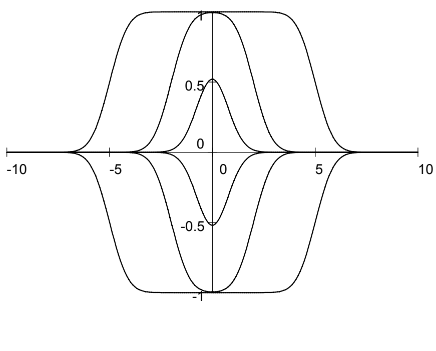
d'Alemberts Wellengleichung: Wellenpakete

1. Bestimmen Sie die Funktion $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$, für die $\left(c^{-2}\left(\partial_t\right)^2 - \left(\partial_x\right)^2\right) A = 0$ mit den Anfangsbedingungen $A(0,x) = u(x) := \cos\left(k_0 x\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$ und $\partial_t A\,(0,x) = 0$ gilt. Dabei seien $a^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $k_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Warum gilt $A(t,-x) = A(t,x)$? Warum gilt $A(-t,x) = A(t,x)$? Zeigen Sie weiter, dass
$$A(t,x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \cos\left(ckt\right)\cos\left(kx\right)\left(e^{-\frac{a^2}{2}(k-k_0)^2} + e^{-\frac{a^2}{2}(k+k_0)^2}\right) dk.$$
Welche Fouriertransformierte hat die Abbildung $A(\cdot,x) : t \mapsto A(t,x)$? Welche Anfangsdaten hat die Lösung $(t,x) \mapsto u(x-ct)$ bei $t=0$? Die Abbildung zeigt die Graphen von $A(0,\cdot)$ und von $A(10,\cdot)$ für $c=1, k_0=5$.



2. Bestimmen Sie die Lösung von d'Alemberts Wellengleichung in $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit den Anfangsbedingungen $A(0,x) = 0$ und $\partial_t A\,(0,x) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Es seien $a^2, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$. Warum gilt $A(t,-x) = A(t,x)$? Warum gilt $A(-t,x) = -A(t,x)$? Die Abbildung zeigt die Graphen von $A(t,\cdot)$ für $t = \pm 1/2, \pm 2, \pm 5$ und für $a = c = 1$ und $\tau = \sqrt{\pi}/2$. Wo konzentriert sich die Energiedichte von A zur Zeit t?



$$\frac{\operatorname{erf}(x+y)-\operatorname{erf}(x-y))}{2}$$