11. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 17. & 18. Jan 2005 / GG

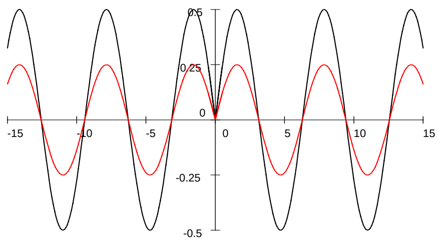
Distributionen: Schwache Lösungen von Differentialgleichungen, Fundamentallösungen

1. Für $0 \neq k \in \mathbb{R}$ sei G_k die reguläre Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zur Funktion $x \mapsto (2k)^{-1} \sin(k|x|)$, d.h. $G_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k|x|)}{2k} f(x)dx$. Zeigen Sie, dass $G_k'' + k^2 G_k = \delta$. Lesen Sie aus $k \to 0$ ein $G_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $G_0'' = \delta$ ab.

2. (Stehwellenlösung zur sinusmodulierten ruhenden Punktquelle der d'AWG) Sei $\omega := ck \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $\Gamma \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^2\right)$ die reguläre Distribution zur Funktion $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

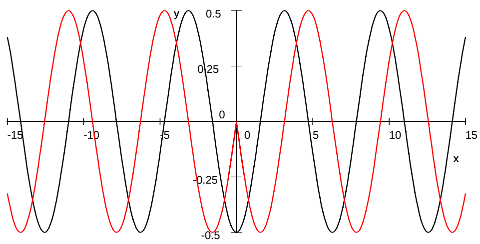
$$\gamma(t,x) = -\sin(\omega t)\sin(k|x|)/(2k).$$

Zeigen Sie für $J \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^2\right)$ mit $J(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) f(t,0)dt$, dass $\Box\Gamma = J$, d.h. für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt $\Gamma(\Box f) = J(f)$. Formal wird J mit der „Funktion" $j(t,x) = \sin(\omega t)\delta(x)$ assoziiert und daher $\Box\gamma(t,x) = \sin(\omega t)\delta(x)$ geschrieben.



$\frac{\sin(|x|)}{2}$ und $\frac{\sin(|x|)}{4}$

3. (Ausstrahlungslösung zur allgemein modulierten ruhenden Punktquelle der d'AWG) Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und sei F eine Stammfunktion von f. Sei A die Funktion $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (t,x) \mapsto \frac{c}{2} F\left(t - \frac{|x|}{c}\right)$. Zeigen Sie den formal notierten Sachverhalt $\Box A(t,x) = f(t)\delta(x)$. Wählen Sie nun mit $\omega := ck \in \mathbb{R}_{>0}$ die Funktion f als $f(t) = \sin(\omega t)$. Zeigen Sie damit für $A(t,x) = -\frac{\cos(k|x|-\omega t)}{2k}$, dass $\Box A(t,x) = \sin(\omega t)\delta(x)$.



$-\frac{\cos(|x|)}{2}$ und $-\frac{\cos\left(|x|-\frac{\pi}{2}\right)}{2}$

4. (Retardierte Greenfunktion) Sei Θ die Heaviside Stufenfunktion und sei $\Delta_{ret} \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^2\right)$ die reguläre Distribution zur Funktion $D_{ret} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto \frac{c}{2}\Theta\left(c^2t^2 - x^2\right)\Theta(t)$. Also gilt

$$\Delta_{ret}(f) = \frac{c}{2}\int_0^{\infty}\left(\int_{-ct}^{ct} f(t,x)dx\right)dt.$$

Zeigen Sie $\Box\Delta_{ret} = \delta^2$. Expliziter: $\Delta_{ret}(\Box f) = f(0,0)$ für alle $f \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Hinweis: zeigen und verwenden Sie $\Theta\left(c^2t^2 - x^2\right)\Theta(t) = \Theta(ct+x)\Theta(ct-x)$. Die Distribution Δ_{ret} heißt retardierte Fundamentallösung des d'Alembertoperators $\Box$. Die Funktion D_{ret} heißt retardierte Greenfunktion von $\Box$.

5. Sei $T_\kappa \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $T_\kappa(f) = \frac{\kappa}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\kappa\,|x|)\, f(x)dx$. Zeigen Sie für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, dass $\lim_{\kappa\to\infty} T_\kappa(f) = \delta(f) = f(0)$.

6. Für $0 \neq \kappa \in \mathbb{R}$ sei G_κ die Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $G_\kappa(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\kappa|x|)}{2\kappa} f(x)dx$. Zeigen Sie, dass $G_\kappa'' - \kappa^2 G_\kappa = \delta$. (Für $\kappa > 0$ kann G_κ zu einer temperierten Distribution fortgesetzt werden.)

7. (Ausstrahlungslösung zur sinusmodulierten bewegten Punktquelle der d'AWG: aktiver Dopplereffekt) Sei $k = \omega/c \in \mathbb{R}_{>0}, v \in [0, c)$ und $k_\pm := ck/(c \mp v)$. Zeigen Sie für die reguläre Distribution zur (stetigen!) Funktion $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$A(t,x) = -\frac{1}{2k}\left[\Theta(x - vt)\cos(k_+(ct - x)) + \Theta(vt - x)\cos(k_-(ct + x))\right],$$

dass (formal) $\Box A(t,x) = \sin(\omega t)\,\delta(x - vt)$.