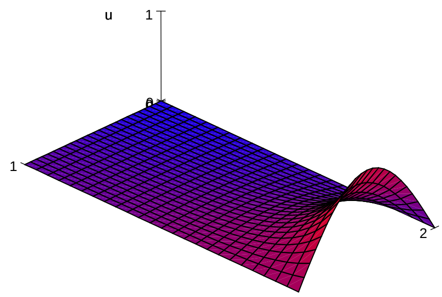
10. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 10. & 11. Jan 2005 / GG

Inhomogene Dirichletprobleme zu $\Delta u = 0$: Rechteck und Kreisscheibe[1]

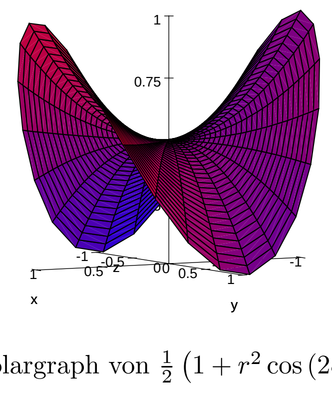
1. Sei $R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\right\}$. Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\,|_R \in \mathcal{C}^2(R : \mathbb{R})$. Auf R gelte $\Delta u = 0$. Am Rand von R gelte: $u(x, L_2) = \sin\left(\pi \frac{x}{L_1}\right), u(x,0) = 0, u(0,y) = 0, u(L_1, y) = 0$. Zeigen Sie mit dem Separationsansatz $u(x,y) = f(x)g(y)$, dass für alle $(x,y) \in \overline{R}$ gilt $u(x,y) = \frac{\sin(\pi x/L_1)\sinh(\pi y/L_1)}{\sinh(\pi L_2/L_1)}$.



u für $L_1 = 1$ und $L_2 = 2$

2. Zuerst eine Vorüberlegung zu Beispiel 3. Für $y : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ gelte $y'' + \lambda y = 0$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. y sei nicht die Nullfunktion. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 2\pi} y(x)$ und $\lim_{x\to 0} y'(x) = \lim_{x\to 2\pi} y'(x)$ genau dann gilt, wenn $\lambda = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und im Fall $n = 0$ die Funktion y überdies konstant ist.

3. Sei $K_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\right\}$ für ein $R > 0$ und sei $u \in \mathcal{C}\left(\overline{K_R} : \mathbb{R}\right)$. Für $u\,|_{K_R}$ gelte $u\,|_{K_R} \in \mathcal{C}^2(K_R : \mathbb{R})$ und $\Delta u = 0$ (auf K_R). Für den Kartenausdruck u^ψ von u in Polarkoordinaten $\psi = (r, \phi)$ gelte die Randbedingung $u^\psi(R, \phi) = \cos^2\phi$. Zeigen Sie über den Separationsansatz $u = f(r)g(\phi)$ (auf dem Durchschnitt von K_R mit dem Definitionsbereich U der Polarkoodinaten), dass auf $K_R \cap U$
$$u = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos(2\phi)\right).$$
Zeigen Sie weiter, dass für alle $(x,y) \in K_R$
$$u(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2R^2}.$$

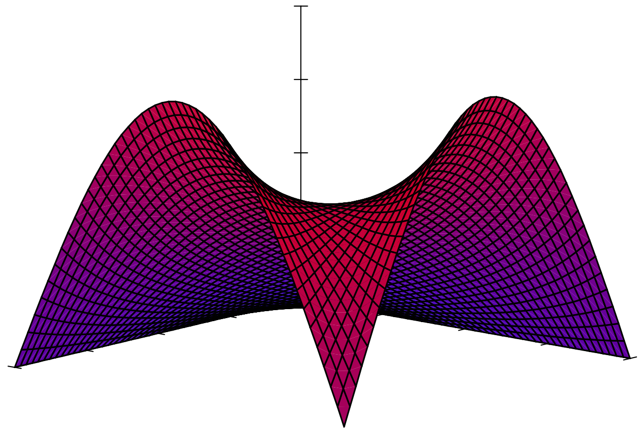


Polargraph von $\frac{1}{2}\left(1 + r^2\cos(2\phi)\right)$

[1] Physikalische Anwendungen sind: statische Membranauslenkung oder auch die Temperatur- oder Potentialfunktion bei gegebenen Randwerten.

Freiwillige Zusatzaufgaben:

4. Sei $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L \text{ und } 0 < y < L\}$. Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\,|_R \in \mathcal{C}^2\,(R : \mathbb{R})$. Auf R gelte $\Delta u = 0$. Am Rand von R gelte: $u\,(x, L) = \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right), u(x, 0) = 0, u(L, y) = \sin\left(\pi \frac{y}{L}\right), u(0, y) = 0$. Zeigen Sie unter Verwendung des „Superpositionsprinzips" und der Invarianz von Δ unter der Vertauschung $x \leftrightarrow y$, dass aus dem Ergebnis von Bsp. 1) folgt:
$$u(x, y) = \frac{1}{\sinh(\pi)} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sinh\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right].$$
.



5. Sei $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\}$. Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\,|_R \in \mathcal{C}^2\,(R : \mathbb{R})$. Auf R gelte $\Delta u = 0$. Am Rand von R gelte: $u\,(x, L_2) = \sin\left(\pi \frac{x}{L_1}\right), u(x, 0) = -\sin\left(\pi \frac{x}{L_1}\right), u(0, y) = 0, u(L_1, y) = 0$. Leiten Sie aus dem Ergebnis von Bsp. 1) unter Verwendung des Superpositionsprinzips und der Invarianz von Δ und R bei der Spiegelung $(x, y) \mapsto (x, L_2 - y)$ ab, dass für alle $(x, y) \in \overline{R}$
$$u(x, y) = \frac{\sin(\pi x/L_1)\,[\sinh(\pi y/L_1) - \sinh(\pi\,(L_2 - y)\,/L_1)]}{\sinh(\pi L_2/L_1)}.$$