1. Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 2 / 11. & 12. Oktober 2004 / GG

Einige Lösungen von d'Alemberts Wellengleichung:
stehende Wellen, d'Alemberts Lösungsformel

1. Seien $c^2, k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $S_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto f(t)\sin(kx)$ mit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Menge aller f, für die
$$\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t)^2 - (\partial_x)^2\right) S_f = 0$$
gilt. Für welche Funktion f gilt $S_f(0,x) = \sin(kx)$ und $\partial_t S_f(0,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Für welche Funktion f gilt $S_f(0,x) = 0$ und $\partial_t S_f(0,x) = \frac{1}{\tau}\sin(kx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Hier ist $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$. Beachten Sie: Diese beiden Lösungen sind gerade bzw. ungerade im ersten Argument, d.h. es gilt gilt $S_f(-t,x) = \pm S_f(t,x)$. Woran liegt das?

2. Kontrollieren Sie die beiden Lösungen aus Bsp.1) mithilfe von d'Alemberts Formel für die Lösung mit den Anfangswerten $A(0,x) = u(x)$ und $\partial_t A(0,x) = v(x)$, wobei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$,
$$A(t,x) = \frac{1}{2}\left\{u(x+ct) + u(x-ct)\right\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi)d\xi.$$
Welche zwei gegeneinander laufenden harmonischen Wellen superponieren also zu A?