Name:..Matrikelnr:...

Zahl der abgegebenen Blätter..................

Erste Klausur

1. (4 Punkte) Überprüfen Sie mittels der Cauchy-Riemann-Gleichungen ob die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ holomorph ist. Prüfen Sie auch, ob $\Delta \Re f = 0$ gilt.

2. (4 Punkte) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{R}_{>0}$ das Integral

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^2 e^{ikx} dx$$

   mit dem Residuensatz. Skizzieren und begründen Sie den geschlossenen Integrationsweg, mit dem Sie arbeiten. Gegen welchen Wert konvergiert $I(k)$ für $k \searrow 0$ und gegen welchen für $k \to \infty$?

3. (4 Punkte) Bestimmen Sie für $n \geq 3$ die Menge aller Funktionen auf $\mathbb{R}^n \setminus 0$, die sowohl drehinvariant als auch harmonisch sind. Welche dieser Funktionen besitzen eine stetige Fortsetzung nach $\mathbb{R}^n$? Sind letztere auf ganz $\mathbb{R}^n$ harmonisch?

   Hinweis: Rechnen Sie in kartesischen Koordinaten x^i und benützen Sie, indem Sie sich zunächst von $\partial_i r = x^i / r$ für die Normfunktion $r = |\cdot|$ überzeugen,

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f(r) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left[(\partial_i r) f'(r) \right] = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left[\frac{x^i}{r} f'(r) \right] = \ldots$$

   So benötigen Sie keine Formel für den Laplaceoperator in n-dimensionalen Kugelkoordinaten.

4. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von $\Box A = 0$, für die $A(0, x) = 0$ und $\partial_t A(0, x) = ck \cos(kx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dabei sei $k > 0$. (Siehe Hinweis 1) Kontrollieren Sie an Ihrem Ergebnis die Gültigkeit von $\Box A = 0$ und die Erfüllung der Anfangsvorgaben. Geben Sie für Ihre Lösung einen rechts- und einen linksläufigen Anteil an. Ist Ihre Lösung eine stehende Welle? (Siehe Hinweis 2) Ist die Funktion $t \mapsto A(t, 0)$ periodisch? Falls ja, geben Sie eine möglichst kleine Periode an.

   Hinweis 1:

$$A(t, x) = \frac{1}{2} \left[u(x - ct) + u(x + ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi) \, d\xi$$

   Hinweis 2:

$$\frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right] = \sin(\alpha) \cos(\beta)$$