d'Alemberts und Duhamels Lösungsformeln

1. Welche Lösung $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ von $\Box A = 0$ erfüllt die Anfangsvorgabe $A(0,x) = \sin(kx)$ und $\partial_t A(0,x) = 0$ mit $k > 0$? Ist sie eine stehende Welle? Ist die Lösung zur Anfangsvorgabe $A(0,x) = \exp(\sin(kx))$ und $\partial_t A(0,x) = 0$ mit $k > 0$ eine stehende Welle? Ist die zugehörige Abbildung $x \mapsto A(t,x)$ für festes t periodisch? Wenn ja, hat diese Abbildung eine kleinste Periode? Wenn ja, hängt diese kleinste Periode von t ab?

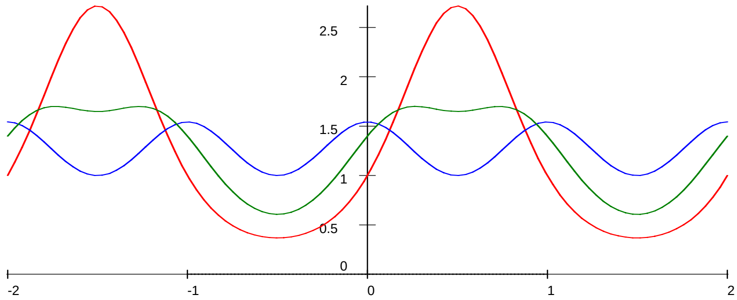

Figure 1: $x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^{\sin\pi(x-ct)} + e^{\sin\pi(x+ct)}\right)$ für $ct = 0$ (rot), $ct = \frac{1}{3}$ (grün) und $ct = \frac{1}{2}$

2. Wie müssen die Anfangsvorgaben $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu $\Box A = 0$ und $A(0,\cdot) = u$ und $\partial_t A(0,\cdot) = v$ aufeinander abgestimmt werden, damit die Lösung $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ eine rechtsläufige ist?

3. Für welche Lösung $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ von d'Alemberts Wellengleichung gilt folgende Anfangsvorgabe?

$$A(0,x) = 0, \quad \partial_t A(0,x) = \frac{e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{\tau}$$

   Es seien $a, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$. Hinweis: Verwenden Sie die Gauß'sche Fehlerfunktion. Überzeugen Sie sich, dass $A(t,-x) = A(t,x)$ und $A(-t,x) = -A(t,x)$. Figur 2 zeigt die Graphen von $A(t,\cdot)$ für $t = \pm 1/2, \pm 2, \pm 5$ und für $a = c = 1$ und $\tau = \sqrt{\pi}/2$, also Momentaufnahmen der Lösung. Figur 3 zeigt den raumzeitlichen Graphen der Funktion A. Wo konzentriert sich die Energiedichte von A zur Zeit t?

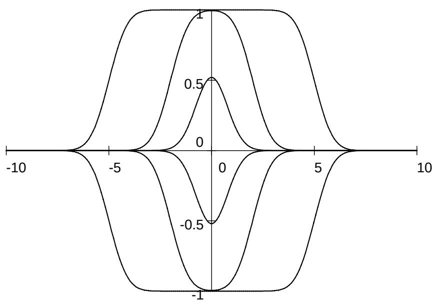

Figure 2: Momentaufnahmen der Hammerschlaglösung

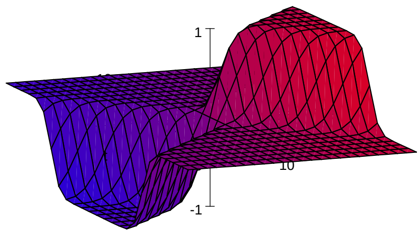

Figure 3: Der Graph von $\frac{\operatorname{erf}(x+y)-\operatorname{erf}(x-y))}{2}$

4. Mit $v, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$ gelte für $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$j\,(t,x) = \begin{cases} \frac{\omega}{c}\sin\,(\omega t)\,\delta\,(x - vt) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dabei sei δ Diracs Delta-„Funktion". Berechnen Sie die retardierte Lösung von $\Box A = j$, nämlich

$$A_{ret}\,(t,x) = \frac{c}{2}\int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} j\,(s,\xi)\,d\xi\right) ds.$$

Unterscheiden Sie die Fälle:

- $v < c$ und die Bereiche $I_a = \{(t,x) : vt < x < ct, t > 0\}$ und $J_a = \{(t,x) : -ct < x < vt, t > 0\}$
- $c < v$ und die Bereiche $I_b = \{(t,x) : ct < x < vt, t > 0\}$ und $J_b = \{(t,x) : -ct < x < ct, t > 0\}$
- $c = v$ und den Bereich $J_c = \{(t,x) : -ct < x < ct, t > 0\}$

In welche Richtungen laufen die Lösungen in den verschiedenen Bereichen? Welche Frequenzen lassen sich an den verschiedenen Lösungsteilen identifizieren?

Hinweis: Unter Diracs Delta stellen Sie sich vorläufig eine nichtnegative reellwertig Funktion auf $\mathbb{R}$ vor, deren Integral über ganz $\mathbb{R}$ zwar 1 ergibt, die aber nur in einem so kleinen Intervall von 0 verschieden ist, dass für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgende Approximation (für unsere Genauigkeitsanspüche) ausreicht

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\,(y - x)\, f\,(y)\, dy \approx f\,(x)\,.$$

Die Sinusquelle j ist somit zu einer beliebigen positiven Zeit t nur in einem winzigen Ortsintervall um den Punkt vt „aktiv", also von 0 verschieden. Zu einer negativen Zeit ist die Quelle nirgends aktiv. Für eine Berechnung von $A\,(t,x)$ mit $|x| = ct$ ist diese hier formulierte „Definition" von Diracs Delta zu ungenau.