Diskussion einfacher Lösungen der Gleichungen von Laplace, Schrödinger und d'Alembert

1. Die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit
$$u(x) = \frac{a}{|x|} + b$$
ist nach Bsp. 1c auf Blatt 5 für jedes Paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ harmonisch. Sei $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : R_1 < |x| < R_2\right\}$ mit $0 < R_1 < R_2$. In welchen Punkten von $\overline{\Omega}$ ist u für $a > 0$ maximal und in welchen minimal? Respektiert Ihr Ergebnis das Maximumsprinzip? Können a, b so gewählt werden, dass u die (eindeutige!) Lösung von Dirichlets Randwertproblem zu $\Delta u = 0$ mit der Vorgabe
$$u(x) = 0 \text{ für } |x| = R_1 \text{ und } u(x) = V \in \mathbb{R} \text{ für } |x| = R_2$$
ist? (Die Funktion u ist das elektrische Potential zwischen den Schalen eines Kugelkondensators, an dem die Spannung V anliegt.)

2. Eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{C}\right)$ heißt Lösung der freien, parameterreduzierten, 1d-Schrödingergleichung, wenn für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$
$$i\partial_t \phi(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \phi(t,x). \tag{1}$$

   (a) Seien $u = \Re\phi, v = \Im\phi$. Zeigen Sie, dass Gleichung (1) äquivalent ist zum reellen System
$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x^2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

   (b) Sei $k \in \mathbb{R}$ fest gewählt und $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\phi(t,x) = f(t)\exp(ikx)$. Dabei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann Lösung von (1) ist, wenn ein $A \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $f(t) = A\exp\left(-i\frac{k^2}{2}t\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wählen Sie im Folgenden $A = 1$. Berechnen und skizzieren Sie $u = \Re\phi$ und $v = \Im\phi$. In welche Richtungen verschieben sich die Graphen von $x \mapsto u(t,x)$ und $x \mapsto v(t,x)$ mit wachsendem t und mit welchen Geschwindigkeiten geschieht dies? Für jedes $x \in \mathbb{R}$ hat die Abbildung $t \mapsto \phi(t,x)$ konstanten Betrag. (Siehe Figur 1) Welchen Drehsinn hat diese Abbildung? Mit welchen Frequenzen schwingen die (periodischen!) Funktionen $t \mapsto u(t,x)$ und $t \mapsto v(t,x)$? Welcher Zusammenhang verknüpft die (von t unabhängigen!) Wellenlängen von $x \mapsto u(t,x)$ bzw. $x \mapsto v(t,x)$ mit diesen Frequenzen? In welche Richtung verschiebt sich der Graph von $x \mapsto \phi(t,x)$ mit wachsendem t mit welcher Geschwindigkeit? (Phasengeschwindigkeit von ϕ)

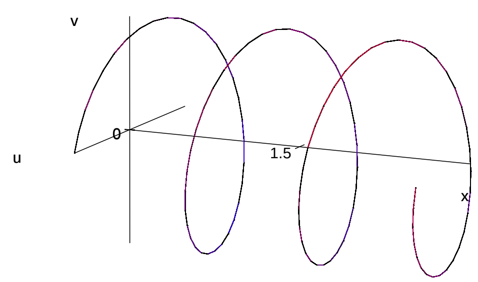

Figure 1: Die Funktion $x \mapsto \phi(0,x)$ für $k = 2\pi$.

3. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{C}$ für alle $(t,x) \in \Omega$ eine $\mathcal{C}^2$-Lösung von Gleichung (1). Zeigen Sie, dass für die Funktionen $\rho = |\phi|^2$ und $j = \Im\left(\overline{\phi}\partial_x\phi\right)$ die Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho\,(t,x) = -\partial_x j\,(t,x)$ für alle $(t,x) \in \Omega$ gilt. Drücken Sie ρ und j durch $\Re\phi$ und $\Im\phi$ aus. Überprüfen Sie die Kontinuitätsgleichung an der Lösung ϕ von Beispiel 2b) und auch an der Lösung ϕ aus Beispiel 2) auf Übungsblatt 4.

4. Seien $c, k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto f(t)\sin(kx)$ mit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Sei L_k die Menge aller solchen Funktionen A, für die $\Box A = 0$.

   (a) Bestimmen Sie L_k. Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
   $$A_{a,b}(t,x) := (a\cos(ckt) + b\sin(ckt))\sin(kx)$$
   für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Figur 2 zeigt $x \mapsto A_{1,0}(t,x)$ für $k = 1 = c$ zu den Zeiten $t \in \left\{0, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \pi\right\}$.

   (b) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0,x) = \sin(kx)$ und $\partial_t A(0,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Lösung: $A(t,x) = \cos(ckt)\sin(kx)$.

   (c) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0,x) = 0$ und $\partial_t A(0,x) = \frac{1}{\tau}\sin(kx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Hier ist $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$. Lösung: $A(t,x) = \frac{1}{ck\tau}\sin(ckt)\sin(kx)$.

   (d) Wie muss f gewählt werden, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $(kx)^3$ ersetzt wird? Lösung: $f = 0$.

   (e) Wie lautet L_k, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $\exp(kx)$ ersetzt wird? Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A_{a,b}(t,x) := (a\exp(ckt) + b\exp(-ckt))\exp(kx)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

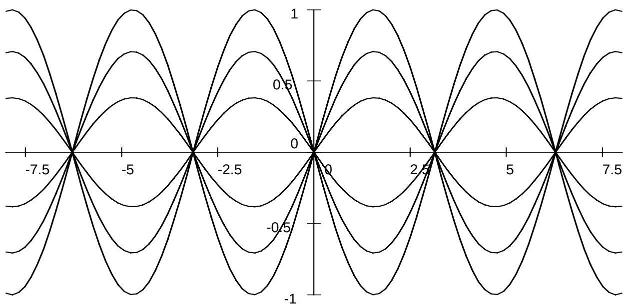

Figure 2: Schnappschüsse einer stehenden Welle

5. Kontrollieren Sie für $A \in L_k$ von Beispiel 4a) oder 4e) die Formel von d'Alembert
$$A(t,x) = \frac{1}{2}\{u(x+ct) + u(x-ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi)d\xi.$$
Diese Formel drückt *jede* $\mathcal{C}^2$-Lösung der Wellengleichung auf $\mathbb{R}^2$ durch ihre Anfangswerte $A(0,x) = u(x)$ und $\partial_t A(0,x) = v(x)$ aus. Es gilt dabei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Geben Sie die Zerlegung von $A \in L_k$ in einen links- und einen rechtsläufigen Anteil an.