Partielle Differentialgleichungen: Invariante Lösungsansätze; Nachschlag zum Residuensatz

1. Die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei harmonisch, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Wir betrachten nun einige Spezialfälle von Definitionsbereichen Ω. Die Translations- bzw. Drehinvarianz von Δ und Ω legt dann die folgenden 'invarianten' Ansätze für u nahe.

   (a) Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$. Geben Sie die Menge aller u an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x, y) = f(x)$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt. (In y-Richtung translationsinvariante Lösung)

   (b) Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus 0$. Geben Sie die Menge aller u an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt. (Um 0 drehinvariante Lösung)

   (c) Sei $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus 0$. Geben Sie die Menge aller u an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ für alle $(x, y, z) \in \Omega$ gilt.

   (d) Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$. Geben Sie die Menge aller u an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ für alle $(x, y) \in \Omega \setminus 0$ gilt.

   (e) Sei Ω der Kartenbereich der Polarkoordinaten (r, φ) in $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die Menge aller u an, für die eine reelle Zahl l und eine Funktion $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u = r^l f(\varphi)$ auf Ω gilt. *Hinweis:* Spätestens jetzt verwenden Sie den Laplaceoperator in Polarkoordinaten.

   (f) Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$. Geben Sie die Menge aller u an, für die eine reelle Zahl l und eine Funktion $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u = r^l f(\varphi)$ am Kartenbereich der Polarkoordinaten (r, φ) gilt.

2. Für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ gelte die parameterreduzierte 1d Schrödingergleichung

$$i\partial_t u(t, x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u(t, x) \tag{1}$$

   für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Welche Differentialgleichung muss die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ lösen, damit für die Funktion $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ mit $\psi(t, x, y) = u(t, x) \cdot v(t, y)$ die 2d-Schrödingergleichung (2) gilt?

$$i\partial_t \psi(t, x, y) = -\frac{1}{2}\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)\psi(t, x, y) \tag{2}$$

3. Sei $\Omega = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ und $u : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Lösung von Gleichung (1). Zeigen Sie, dass dann für $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ auch die 'gedehnte' Funktion $u_\lambda : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$u_\lambda(t, x) = u\left(\lambda t, \sqrt{\lambda} x\right)$$

   Lösung von Gleichung (1) ist.[1] Eine Lösung $u : \Omega \to \mathbb{C}$, für die eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existiert, sodass für alle $(t, x) \in \Omega$

$$u(t, x) = h\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

   gilt, ist offenbar dehnungsinvariant. Zeigen Sie, dass es genau eine dehnungsinvariante Lösung von Gleichung (1) auf Ω gibt, für die

$$\lim_{t \to 0} u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } x > 0 \\ 0 & \text{für alle } x < 0 \end{cases}.$$

   Rechnen Sie an dieser Lösung u nach, dass $\partial_x u$ auf Ω mit dem Evolutionskern von Gleichung (1) übereinstimmt. (Siehe Blatt 4)

4. Sei $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$ und $\gamma_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_r(t) = 1 + r\exp(it)$ für $r > 0$. Überzeugen Sie sich, dass

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < r < 1 \\ 2\pi i & \text{für } 1 < r \end{cases}.$$

[1] Die Schrödingergleichung ist also 'dehnungsinvariant'.