Gauß'sche Integrale und Evolutionskern der Schrödingergleichung; Laurentreihenentwicklung

1. Die Funktion $u : \Omega = (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $u(t,x) = \exp\left(ix^2/2t\right)/\sqrt{2\pi i t}$ heißt Evolutionskern der (parameterreduzierten) Schrödingergleichung. Dabei bezeichnet $\sqrt{\cdot}$ den Hauptzweig der (komplexen) Quadratwurzel. Kontrollieren Sie mithilfe der Formel für Gauß'sche Integrale, dass für alle $t \neq 0$
$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\,dx = 1$$
gilt. Zeigen Sie weiter, dass für alle $(t,x) \in \Omega$
$$i\partial_t u(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u(t,x). \tag{1}$$
Die Funktion u ist also (auf ihrem gesamten Definitionsbereich Ω) eine Lösung der parameterreduzierten, freien, 1d Schrödingergleichung. Rechnen Sie nach, dass $u(-t,x) = \overline{u(t,x)}$. Berechnen Sie $\Re u(t,x)$ und $\Im u(t,x)$ für $t > 0$.

2. Die Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\phi(t,x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2(1+it)}\right)/\sqrt{1+it}$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ eine Lösung von Gleichung (1). Rechnen Sie das nach. Zeigen Sie weiter, dass für alle $t \in \mathbb{R}$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t,x)|^2\,dx = \sqrt{\pi}.$$

3. Für die Funktionen u und ϕ der beiden vorangehenden Beispiele gilt für alle $(t,x) \in (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R}$
$$\phi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x-y)\,\phi(0,y)\,dy.$$
Zeigen Sie das. *Hinweis:* Nach geeigneter quadratischer Ergänzung ist die Gauß-Formel
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+\beta)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$
anwendbar. Dabei gilt $\beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\Re\alpha > 0$.

4. Sei u wie in Beispiel 1. Zeigen Sie für die Funktion $H : \Omega \to \mathbb{C}$ mit
$$H(t,x) := \int_{-\infty}^{x} u(t,\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}}\int_{-\infty}^{x} e^{i\frac{\xi^2}{2t}}d\xi,$$
dass
$$\lim_{t\to 0} H(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$
Hinweis: Ersetzen Sie die Integrationsvariable ξ durch $\xi' = \xi/\sqrt{\pi t}$ und beachten Sie dann, dass der Integrand unabhängig von t wird. Wie drückt sich die Funktion H, die auch eine Lösung der Schrödingergleichung (1) ist, für $t > 0$ durch die (reellen) Fresnelfunktionen C und S aus?[1]

5. Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0,-1,2\} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = \frac{6}{z(z+1)(z-2)}$$
hat drei Laurentreihenentwicklungen um den Punkt 0. Eine am Kreis $0 < |z| < 1$, eine am Kreisring $1 < |z| < 2$ und eine auf $|z| > 2$. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung die drei zugehörigen Koeffizientenfolgen $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

[1] Die Funktion $F : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit
$$F(t,x) = H(t,x+L) - H(t,x-L)$$
ist eine Lösung von Gleichung (1), die sich zur Zeit $t > 0$ aus dem Intervall $(-L,L)$ auf ganz $\mathbb{R}$ ausbreitet. Sie ist Teil eines (sehr) idealisierten Modells der Beugung von 'Materiewellen' an einem Spalt.