Holomorphie; Potenzreihe von ln *um* 1; *komplexe Kurvenintegrale*

1. Prüfen Sie (mithilfe von Polarkoordinaten r, φ) ob Real- und Imaginärteil von ln harmonisch sind. Hinweis: $\Delta f = \frac{1}{r}\partial_r (r\partial_r f) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 f$. Der Realteil von ln ergibt das elektrische Potential einer homogen geladenen Geraden im 3d Raum.

2. Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ existiert eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\Re f)(x + iy) = x^2 + 2axy + by^2 \tag{1}$$

gilt? Geben Sie zu jedem solchen Paar (a, b) alle holomorphen Funktionen f an, für die Gleichung (1) gilt.

Hinweis: Was lässt sich aus $\Delta(\Re f) = 0$ über b erschließen? Lösen Sie dann mit diesem Wissen die Cauchy-Riemann Gleichungen.

3. Sei $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : K_1 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/(1 + z)$. Dann gilt für alle $z \in K_1$

$$f(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$

Ersetzen Sie nun in dieser geometrischen Reihe jeden der Summanden $(-1)^n z^n$ durch seine jeweilige Stammfunktion $(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Die so entstehende Reihe ist durch die geometrische Reihe, die den Konvergenzradius 1 hat, majorisiert. (Warum?) Sie definiert somit auf K_1 die holomorphe Funktion[1] $F : K_1 \to \mathbb{C}$ mit

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$$

F ist nach dem Satz von der gliedweisen Differenzierbarkeit von Potenzreihen eine Stammfunktion von f. Eine solche ist aber auch die Funktion $z \mapsto \ln(1 + z)$ auf K_1. Zeigen Sie: $F(z) = \ln(1 + z)$ für alle $z \in K_1$. Welche Potenzreihe hat die Funktion ln um einen Punkt $x \in \mathbb{C}$ mit $x = \Re x > 0$? Wenden Sie den Trick der gliedweisen Integration nun auf die Funktion F an. Zeigen Sie, dass Sie so die Stammfunktion

$$z \mapsto (1 + z)\ln(1 + z) - z$$

von F auf K_1 erhalten.

4. Sei $R > 0$ und $\gamma_1 : [-2R, 0] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t + R$. Weiter sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto R \cdot \exp(it)$. Die Kurve $\gamma : [-2R, \pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

parametrisiert daher einen in der oberen komplexen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 (samt Durchmesser). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{2R^3}{3}(2 - \alpha).$$

Beachten: f ist holomorph $\Leftrightarrow \alpha = 2 \Leftrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

[1] Für $z = 1$ spezialisiert sich die Potenzreihe von $F(z)$ auf die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ Diese konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Nach dem Abel'schen Grenzwertsatz konvergiert sie (wie naiv zu erwarten ist) gegen $\ln(2)$.(O. Forster, Analysis 1, §22) Für $z = -1$ hingegen spezialisiert sich die Reihe $-F(z)$ zur harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ Diese divergiert. (O. Forster, Analysis 1, § 7)