Name:..*Matrikelnr:*...

Zahl der abgegebenen Blätter..................

Zweite Klausur

1. (4 Punkte) Für eine $\mathcal{C}^2$-Funktion $A : \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$ gelte:
   - $\Box A = 0$ auf $\mathbb{R} \times (0, L)$,
   - $A(t, 0) = 0 = A(t, L)$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
   - $A(0, x) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ für alle $x \in (0, L)$,
   - $\partial_t A(0, x) = 0$ für alle $x \in (0, L)$.

   (a) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass $4\sin^3(x) = [3\sin(x) - \sin(3x)]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (b) (2 Punkte) Welche Modenentwicklung hat A?

   (c) (1 Punkt) Welche Kreisfrequenzen kommen in A vor?

2. (4 Punkte) Zu $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ gebe es Funktionen $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{C}) \setminus 0$ und $g \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3 : \mathbb{C}\right) \setminus 0$, sodass $\psi(t, x) = f(t) \cdot g(x)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

   (a) (3 Punkte) Welche Differentialgleichungen für f und g sind der partiellen Differentialgleichung

   $$i\hbar\partial_t\psi(t, x) + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t, x) = 0 \text{ für alle } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

   mit $\hbar, m \in \mathbb{R}_{>0}$ äquivalent? Benutzen Sie dabei als Separationskonstante die Zahl $E = i\hbar\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \in \mathbb{C}$ für ein t_0 mit $f(t_0) \neq 0$.

   (b) (1 Punkt) Geben Sie eine nichttriviale ebene Wellenlösung von (1) mit $E \in \mathbb{R}_{>0}$ an.

3. (4 Punkte) Sei S_E die Menge[1] aller $\mathcal{C}^2$-Lösungen $\psi : \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right) \to \mathbb{C}$ von Gl. (1), für die ein $E \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ existieren, sodass für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$

   $$\psi(t, x) = \exp\left[-i\frac{E}{\hbar}t\right] \cdot \frac{g(|x|)}{|x|}.$$

   (a) (3 Punkte) $S_E = ?$ Hinweis[2]: $\Delta[g(r)/r] = g''(r)/r$ mit $r = |\cdot|$.

   (b) (1 Punkt) Welche Elemente von S_E besitzen eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$?

4. (4 Punkte) Für alle x im Konvergenzbereich der Potenzreihe $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gelte

   $$y''(x) = -y(x).$$

   (a) (1 Punkt) Wie drücken sich $y(0)$ und $y'(0)$ durch c_0 und c_1 aus?

   (b) (1 Punkt) Welche Rekursionsrelationen gelten für die Koeffizienten c_k?

   (c) (2 Punkte) Welche Koeffizienten c_k ergeben sich für $c_0 = 1$ und $c_1 = 0$? Wie hängt die zugehörige Potenzreihe $y(x)$ mit $\cos(x)$ zusammen?

---

[1] Es sind dies die s-Wellenlösungen zur Energie E der freien Schrödingergleichung.

[2] Ein Ergebnis von Aufgabenblatt 9