Legendre'sche Differentialgleichung

1. Sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Die Menge aller Funktionen $y : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, die für alle $x \in (-1,1)$ die allgemeine (oder auch 'zugeordnete') Legendre'sche Differentialgleichung
$$\left(1-x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) - \left(\mu + \frac{m^2}{1-x^2}\right) y(x) = 0 \tag{1}$$
erfüllen, werde mit $L_{\mu,m}$ notiert. $L_{\mu,m}$ ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Seine Elemente sind aufgrund der Lösbarkeit von Gleichung (1) durch Potenzreihenentwicklung um 0 allesamt $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen. Die Abbildung
$$D_m : \mathcal{C}^\infty((-1,1):\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty((-1,1):\mathbb{R}) \text{ mit } [D_m f](x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} f^{(m)}(x),$$
wobei $f^{(m)}$ die m-fache Ableitung von f bezeichnet, ist offensichtlich linear. Bestimmen Sie den Nullraum von D_m. Zeigen Sie, dass D_m den Lösungsraum $L_{\mu,0}$ auf $L_{\mu,m}$ abbildet.

2. Bestimmen Sie die Menge S aller Paare (μ, m), für die die Einschränkung der Abbildung D_m auf $L_{\mu,0}$ *nicht* injektiv ist. Lösung: $S = \{(\mu,m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}_0 : \mu = -l(l+1) \text{ für ein } l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } l < m\}$.

3. Die Funktionen $P_l^m : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit
$$P_l^m(x) := \frac{\left(1-x^2\right)^{m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+l} \left(x^2-1\right)^l$$
für $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $|m| \leq l$ heißen zugeordnete Legendrefunktionen.

   (a) Zeigen Sie (mithilfe der Leibnizregel), dass für $m \in \mathbb{N}$ mit $|m| \leq l$
$$\frac{\partial_x^{l-m} \{(x+1)(x-1)\}^l}{(l-m)!} = \left(x^2-1\right)^m \frac{\partial_x^{l+m} \{(x+1)(x-1)\}^l}{(l+m)!}.$$

   (b) Schließen Sie daraus, dass für alle $m \in \mathbb{Z}$ mit $|m| \leq l$
$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m,$$
und $P_l^m \in L_{-l(l+1),|m|}$.

   (c) Berechnen und skizzieren Sie die Funktionen P_1^m, P_2^m für $m > 0$. Rechnen Sie explizit nach, dass $P_1^1 \in L_{-2,1}$.

4. Sei $\Phi_{l,m} = r^l P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi} : U \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\Phi_{l,m}$ und $\Phi_{l,m}/r^{2l+1}$ harmonisch auf U sind. Geben Sie für $l = 1,2$ und $0 \leq m \leq l$ die kartesischen Kartenausdrücke von $\Phi_{l,m}$ an. Sind diese vom Kartenbereich U der Kugelkoordinaten (r,θ,φ) stetig auf $\mathbb{R}^3$ fortsetzbar? Falls ja, sind die Fortsetzungen harmonisch auf $\mathbb{R}^3$?