Auflösen von Rekursionen: Die Differentialgleichungen von Bessel und Airy

1. Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Der Lösungsansatz $y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $c_0 \neq 0$ für Bessels DG

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y(x) = 0 \text{ für alle } x > 0$$

führt[1] auf die folgende Rekursion der Koeffizienten

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2 - m^2\right) c_0 &= 0, \\ \left((\alpha+1)^2 - m^2\right) c_1 &= 0, \\ \left((\alpha+k)^2 - m^2\right) c_k + c_{k-2} &= 0 \text{ für alle } k \in \{2,3,4,\ldots\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung $\alpha = -m$ der ersten Bedingung durch Einsetzen in die dritte den Widerspruch $c_0 = 0$ erzeugt. Also bleibt nur die Möglichkeit $\alpha = m$. Schließen Sie nun in diesem Fall, dass $c_1 = 0$ gelten muss. Zeigen Sie weiters mittels der dritten Bedingung, dass $0 = c_1 = c_3 = c_5 = \ldots$ folgt. Es bleibt somit nur noch die Rückführung der gerade indizierten Koeffizienten c_{2k} auf c_0 zu ermitteln. Zeigen Sie zunächst, dass

$$c_{2k} = -\frac{c_{2(k-1)}}{4k(k+m)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Jeder gerade indizierte Koeffizient ist somit durch seinen Vorgänger festgelegt. Für die ersten drei Koeffizienten ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} c_2 &= \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{1\cdot(1+m)} c_0, \\ c_4 &= \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{2\cdot(2+m)} c_2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{2\cdot 1\cdot(2+m)\cdot(1+m)} c_0, \\ c_6 &= \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{3\cdot(3+m)} c_4 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot(3+m)\cdot(2+m)\cdot(1+m)} c_0. \end{aligned}$$

Es ist daher zu erraten, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$c_{2k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{m!}{k!\,(k+m)!} c_0$$

gilt. Verifizieren Sie diese Vermutung durch Einsetzen in Gleichung (1).

2. Eine $\mathcal{C}^2$-Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y''(x) - x y(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

heißt (maximale) Lösung von Airys DG. Zeigen Sie: Der Lösungsansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ führt auf die Rekursion

$$c_2 = 0 \text{ und } c_{k+3} = \frac{c_k}{(k+3)(k+2)}.$$

Schließen Sie aus der Rekursion, dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ unendlich ist. Zeigen Sie weiter, dass die Lösung zur Anfangsvorgabe $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ durch die Potenzreihe

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{4\cdot 1}{6!} x^6 + \frac{7\cdot 4\cdot 1}{9!} x^9 + \ldots$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass die Lösung zur Anfangsvorgabe $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ durch die Potenzreihe

$$y_2(x) = x + \frac{2}{4!} x^4 + \frac{5\cdot 2}{7!} x^7 + \frac{8\cdot 5\cdot 2}{10!} x^{10} + \ldots$$

gegeben ist. Ist (y_1, y_2) ein Fundamentalsystem von Airys Differentialgleichung?

[1] Siehe Blatt 11.