Proseminar Mathematische Methoden der Physik II *Universität Innsbruck*
Ergänzungsblatt 11a, 13. Dezember 2011

Inhomogen lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen: Variation der Konstanten (VdK)

1. Begreifen Sie die VdK-Lösungsformel für inhomogen lineare Diff'glen erster Ordnung.[1]

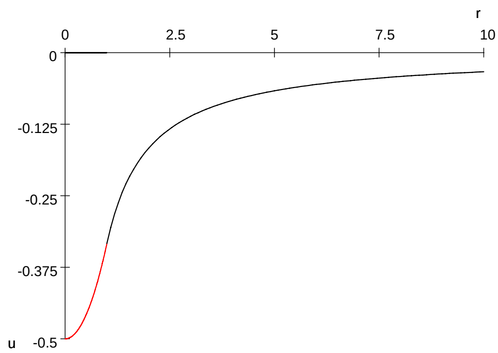
2. Sei $\rho : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ eine vorgegebene stetige Funktion. Dann gilt: $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine drehinvariante $\mathcal{C}^2$-Funktion mit $\Delta\phi(x) = \rho(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$, wenn eine $\mathcal{C}^2$-Funktion $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) = u(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ existiert, sodass
$$u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) = \rho(r) \text{ für alle } r > 0. \tag{1}$$
Wenden Sie Bsp.1 auf $v := u'$ an und beweisen Sie: Die Menge L aller maximalen Lösungen von (1) ist $\{u_{a,b} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, wobei für $u_{a,b}$ bei beliebig gewähltem $r_0 > 0$
$$u_{a,b}(r) = \frac{a}{r} + b + \int_{r_0}^{r} \frac{1}{s^2}\left[\int_{r_0}^{s} t^2 \rho(t)\, dt\right] ds \text{ für alle } r > 0$$
gilt. Warum hängt L nicht von der Wahl von r_0 ab? Zeigen Sie, dass
$$u_{a,b}(r) = \frac{a}{r} + b + \int_{r_0}^{r} \left(s - \frac{s^2}{r}\right) \rho(s)\, ds \text{ für alle } r > 0.$$

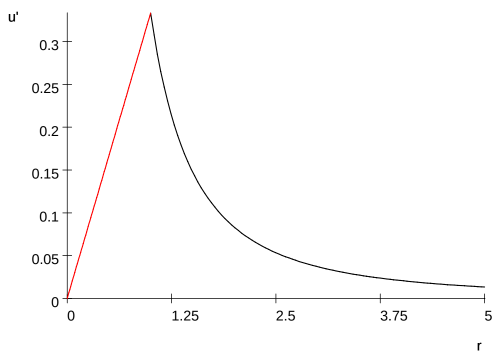
3. Sei $K_R = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\right\}$ für ein $R > 0$ und sei $\rho_0 \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Menge aller drehinvarianten $\mathcal{C}^2$-Funktionen $\phi : K_R \to \mathbb{R}$ mit $\Delta\phi = \rho_0$ auf K_R an.

4. Finden Sie eine drehinvariante $\mathcal{C}^1$-Funktion $\widetilde{\phi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\Delta\widetilde{\phi} = \rho_0$ auf K_R und $\Delta\widetilde{\phi} = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{K_R}$, für die $\lim_{\lambda\to\infty} \widetilde{\phi}(\lambda x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ gilt. Die Abbildungen zeigen $\widetilde{u}$ und $\widetilde{u}'$ für $R = 1 = \rho_0$.[2] Hinweis: Es gibt genau eine Funktion $\widetilde{\phi}$ mit diesen Eigenschaften. Lösung: $\widetilde{\phi} = \widetilde{u} \circ r = -\frac{\rho_0}{2}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)$ für $r < R$ und $\widetilde{u} \circ r = -\frac{\rho_0 R^2}{3} \cdot \frac{R}{r}$ für $r \geq R$.

5. Lösen Sie nun Bsp. 3 nochmals mittels der in Kap. 2.3.1 von Math Meth 1 bewiesenen Lösungsformel für inhomogen lineare Diff'glen 2. Ordnung. Stimmen Ihre beiden Lösungsmengen überein? Wenden Sie das Verfahren auch auf die statisch belastete Kreismembran von Blatt 9 an.

6. Sei $\widetilde{\phi}$ wie in Bsp.4. Finden Sie die maximale Lösung der Differentialgleichung $\gamma''(t) = -grad_{\gamma(t)}\widetilde{\phi}$ zur Anfangsvorgabe $\gamma(0) = R \cdot n$ und $\dot{\gamma}(0) = 0$. Dabei sei n ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$. Setzen Sie nun R mit dem Erdradius $R_E = 6370\,\mathrm{km}$ gleich und wählen Sie ρ_0 so, dass $|\gamma''(0)| = g$ mit $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ gilt. Überlegen Sie sich nun: Welche Geschwindigkeit hatte Freiherr von Münchhausen auf seinem Sturz durch die Erde im Erdmittelpunkt? Wie lange dauerte sein Sturz vom Nord- zum Südpol? (*Lügenchronik*, Dritte Abtheilung, p.77, J Scheible's Buchhandlung Stuttgart 1839; Nachdruck Harenberg, 1978, Dortmund)





---

[1] Z.B. zu finden unter: http://www.uibk.ac.at/th-physik/fth/people/gruebl_gebhard.html#lect
Skriptum Math Meth 1 (Juli 2011), Satz 49, p.69

[2] Die Zahl $4\pi G_N m \cdot \widetilde{\phi}(x)$ gibt die Wechselwirkungsenergie zwischen einer Punktmasse m am Ort x mit einer Masse M an, die auf eine Kugel um 0 mit dem Radius R homogen verteilt ist, wenn $\rho_0 = \frac{3}{4\pi R^3} \cdot M$ gesetzt wird, und G_N Newtons Gravitationskonstante bezeichnet. Fällt ein asymptotisch ruhender Weihnachtsengel aus unendlich großer Entfernung entlang eines Strahles $\mathbb{R}_{>0} \cdot x$ auf die Erde, dann hat er im Punkt x die kinetische Energie $-4\pi G_N m \cdot \widetilde{\phi}(x)$.