

Komplexe Zahlen, Wurzel, Logarithmus und Holomorphie

1. Sei V ein reeller 2d Vektorraum. (e_1, e_2) sei eine Basis von V . Für eine (reell) bilineare Multiplikationsabbildung $\cdot : V \times V \rightarrow V$ gelte

$$e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = -e_1.$$

Rechnen Sie nach, dass dann für alle $u, v, w \in V$ gilt:

$$v \cdot w = w \cdot v, \quad u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w, \quad e_1 \cdot u = u.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $u \in V \setminus \{0\}$ genau ein $u^{-1} \in V$ existiert, sodass $u \cdot u^{-1} = e_1$. Gilt dies auch dann, wenn die Definition von \cdot zu $e_2 \cdot e_2 = +e_1$ abgeändert wird?

2. Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $|w \cdot z| = |w| |z|$, $|1/z| = 1/|z|$.
3. Geben Sie für die vier Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$ die folgenden Größen an: $|z|, \Re z, \Im z, \arg(z)$.
4. $\arg(1 + i\sqrt{3}) = ?$, $\arg(\sqrt{3} - i) = ?$ Berechnen Sie Betrag und Argument von $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$ und von $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$ für den Hauptzweig der Wurzelfunktion. Geben Sie auch die Hauptzweigwerte von $\ln(1 + i\sqrt{3})$ und $\ln(\sqrt{3} - i)$ an.
5. Kontrollieren Sie für die folgenden Funktionen f , ob die jeweils zugehörigen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.

- (a) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$.
- (b) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$.
- (c) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sin(z)$.
- (d) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Legen Sie eine Liste der (harmonischen!) Funktionen $\Re f$ und $\Im f$ an, die dieses Beispiel abwirft. Geben Sie auch die Kartenausdrücke dieser Funktionen in Polarkoordinaten an.

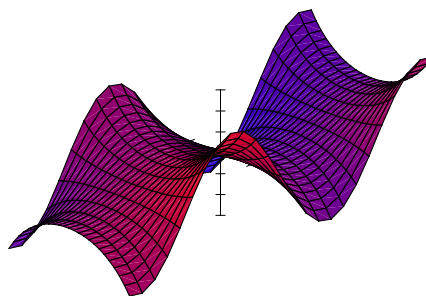


Figure 1: Die harmonische Funktion $\sin(x) \cosh(y)$

6. Geben Sie reelle Funktionen u, v an, sodass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ gilt:

$$u(x, y) + iv(x, y) = \ln(x + iy).$$

Hier bezeichnet \ln den Hauptzweig der Logarithmusfunktion. Drücken Sie u und v durch elementare reelle Funktionen aus. Berechnen Sie: $i^i := e^{i \ln i} = ?$