

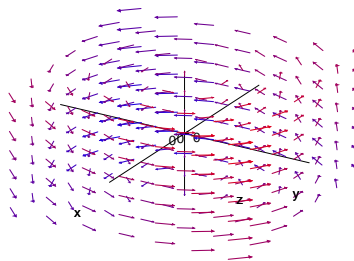
Systeme erster Ordnung

1. *Hamiltonsysteme:* Seien x^1, \dots, x^{2n} die Standardkoordinaten von $V = \mathbb{R}^{2n}$ und sei $U \subset V$ offen. Sei $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar. Das Vektorfeld $X : U \rightarrow V$ habe in der Standardbasis (e_1, \dots, e_{2n}) die Zerlegung

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x^{i+n}} e_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x^i} e_{i+n}.$$

Sei $\gamma : I \rightarrow U$ eine Lösung von $\dot{\gamma} = X \circ \gamma$. Zeigen Sie, dass $H \circ \gamma$ konstant ist. Geben Sie eine solche Funktion H für das Oszillatorsystem $\dot{x}^1 = x^2, \dot{x}^2 = -x^1$ auf $U = \mathbb{R}^2$ an. Ist das System der Zerfallskette $\dot{x}^1 = -x^1, \dot{x}^2 = -x^2 + x^1$ auf $U = \mathbb{R}^2$ ein Hamiltonsystem? (Die Funktion H heißt Hamiltonfunktion und X das zugehörige Hamilton'sche Vektorfeld.)

2. *3d Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit:* Sei V ein dreidimensionaler, orientierter, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für ein festes $n \in V$ ist die Abbildung $L_n : V \rightarrow V, v \mapsto n \times v$ linear. Hier bezeichnet $n \times v$ das Vektorprodukt von n mit v . (Dazu werden Skalarprodukt und Orientierung benötigt.) Sei nun $|n| = 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$.



Das Drehvektorfeld L_{e_3}

- (a) Sei $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow V$ mit $\gamma_v(t) = n \langle n, v \rangle + \cos(\omega t) (v - n \langle n, v \rangle) + \sin(\omega t) n \times v$. Zeigen Sie, dass γ_v die maximale Lösung des Systems $\dot{\gamma} = \omega L_n(\gamma)$ mit $\gamma_v(0) = v$ ist. Welche Bahn hat γ_v ? Hinweis: $a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle$.
- (b) Zeigen Sie $\langle n, \gamma_v(t) \rangle = \langle n, v \rangle$ und $\|\gamma_v(t)\| = \|v\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (c) Kontrollieren Sie durch Summieren der Exponentialreihe, dass $\gamma_v(t) = (\exp(\omega t L_n)) v$.
- (d) Bestimmen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix M von $\exp(\alpha L_n)$ bezüglich einer positiv orientierten Orthonormalbasis (e_1, e_2, n) . Zeigen Sie, dass $M^t M = I_3$ und $\det M = 1$.
- (e) Zeigen Sie für die Beschleunigung $b_v(t) := \frac{d^2 \gamma_v}{dt^2}(t)$, dass $b_v(t) = -\omega^2 (\gamma_v(t) - n \langle n, \gamma_v(t) \rangle)$. Es gilt also $\langle \dot{\gamma}_v(t), n \rangle = \langle \dot{\gamma}_v(t), \gamma_v(t) \rangle = \langle b_v(t), \dot{\gamma}_v(t) \rangle = \langle b_v(t), n \rangle = 0$.
3. *Spin-1/2-System:* Es sei V ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für die Vektoren $e_1, e_2 \in V$ gelte $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ und für die lineare Abbildung $\sigma : V \rightarrow V$ gelte $\sigma e_1 = e_2$ und $\sigma e_2 = e_1$.

- (a) Zeigen Sie mittels $\sigma^2 = id$ und Aufsummieren der Exponentialreihe, dass¹

$$\Phi : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (t, v) \mapsto e^{(-it\sigma)} v = \cos(t) v - i \sin(t) \sigma v =: U(t)v.$$

- (b) Kontrollieren Sie $\langle U(t)v, U(t)w \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$. (Unitarität)
- (c) Zeigen Sie $|\langle U(t)e_1, e_1 \rangle|^2 = \cos^2(t)$.

¹ Φ ist also der maximale Fluss des Systems $i\dot{\gamma} = \sigma\gamma$.