

Die Kettenlinie der Brüder Bernoulli (1691)

1. Eine ruhende (sehr feingliedrige) Kette hängt im homogenen Schwerfeld zwischen zwei Punkten. Diese Punkte haben die gleiche Höhe über Grund und ihr Abstand beträgt 1 m. (Siehe Bild) Die Kette ist 2 m lang. Wie tief hängt die Kette durch?

Lösungshilfe:

- (a) Die Kette liegt in einer Ebene auf dem Graphen einer Funktion $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigt die Schwerkraft in negative y -Richtung, dann gilt für diese Funktion die Differentialgleichung

$$\alpha''(x) = k\sqrt{1 + (\alpha'(x))^2}.$$

Dabei ist die Konstante $k > 0$ und es gilt $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$. Zeigen Sie, dass

$$\alpha(x) = \frac{\cosh\left(k\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) - \cosh\frac{k}{2}}{k}.$$

Trick: Lösen Sie zunächst die Diff-Gleichung für $y = \alpha'$.

- (b) Zeigen Sie, dass

$$\min\{\alpha(x) : 0 \leq x \leq 1\} = \frac{1 - \cosh\frac{k}{2}}{k}$$

- (c) Zeigen Sie nun, dass für die Länge L des Graphen von α

$$L = \frac{2}{k} \sinh\frac{k}{2}$$

gilt. Zur Erinnerung: $L = \int_0^1 \sqrt{1 + \alpha'(x)^2} dx$.

- (d) Bestimmen Sie nun numerisch jenen Wert k , für den $L = 2$ gilt. Lösen Sie also $k = \sinh\frac{k}{2}$.
 (e) Zeigen Sie mit diesem Wert für k , dass die Kette um 796 mm durchhängt.
 (f) Zugabe: Bestimmen Sie das nach oben offene Parabelstück, das 2 m lang ist und durch die Aufhängepunkte der Kette geht. Wie stark hängt diese Parabel durch? Lösung: 817 mm.

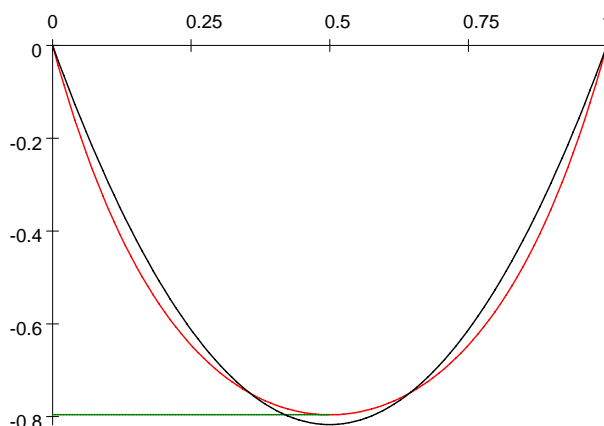


Figure 1: Kettenlinie