Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 - SS2009
1. Klausur, 4.5.2009

1. **Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum: Ein Würfelspiel**

   Zwei Spieler A und B würfeln in der Reihenfolge $A, B, B, A, B, A, B, \ldots$ (dann immer abwechselnd) mit einem sechsseitigen Würfel. Gewinner ist, wer als erstes eine 6 würfelt. Der Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Spiel sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, wobei $n \in \Omega$ bedeutet, dass n-mal gewürfelt wurde, bis eine 6 kam. Bei $n = 1$ gewinnt also Spieler A, bei $n = 2$ oder 3 Spieler B usw.

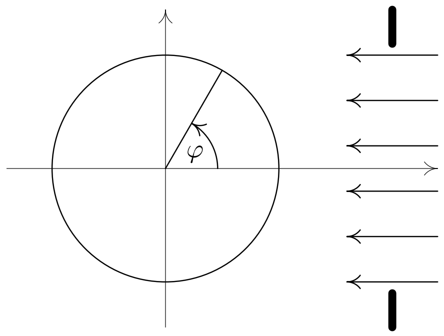
   (a) Bestimmen Sie die Ereignisse $A, B \subset \Omega$ für einen Sieg von Spieler A bzw. B und die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(n)$ für $n \in \Omega$.

   (b) Bestimmen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B. Kann das doppelte Würfeln von Spieler B ausgleichen, dass Spieler A beginnt?
   Hinweise:
   $$\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^n, \quad \frac{191}{396} \approx 0.48, \quad \frac{205}{396} \approx 0.52$$

   (c) Sei $C = \{4, 5, 6, \ldots\} \subset \Omega$ nun ein weiteres Ereignis. $W(A|C)$ ist damit die Wahrscheinlichkeit, dass von Beginn an immer abwechselnd gewürfelt wird und A gewinnt. Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit und geben Sie an, ob A und C stochastisch abhängig sind oder nicht.

2. **Kontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsraum: Beleuchtung eines Kreises (2D)**

   Ein Kreis mit Radius R im Ursprung wird gleichmäßig von rechts von einer Lichtquelle beleuchtet, das bedeutet alle Lichtstrahlen sind parallel und gleichverteilt in $y \in [-R, R]$. Ein Lichtstrahl trifft den Kreis in einem Punkt mit dem Polarwinkel $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (siehe Skizze). Berechnen Sie mit Hilfe des Transportes eines Wahrscheinlichkeitsmaßes die Verteilungsdichte der Strahlen auf dem Kreis abhängig vom Winkel φ. Kontrollieren Sie das Ergebnis anschließend durch Überprüfung der Normierungsbedingung der Verteilung in φ.



3. **Gewöhnliche Differentialgleichungen: Ein Wachstumsmodell für Populationen**

   In diesem Modell soll das Wachstum einer Population $x(t)$ in einem bestimmten Gebiet beschrieben werden. Maximal können darin N Individuen leben, der Startwert $x_0 := x(0)$ kann jedoch prinzipiell auch darüber liegen. Das Wachstum geht umso schneller, je mehr Individuen $x(t)$ gerade vorhanden sind, wird jedoch auch durch den verfügbaren Platz $N - x(t)$ eingeschränkt. Dies führt mit einem Parameter $\mu > 0$ zu folgendem Modell:

   Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \mu x(N - x)$ und $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung.

   (b) Bestimmen Sie die Menge L_1 der maximalen Lösungen für $0 < x_0 < N$ mit ihrem Definitionsbereich und fertigen Sie eine grobe Skizze einer beliebigen solchen Lösung an.
   Hinweis:
   $$\frac{1}{x(N-x)} = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}\right)$$

   (c) Bestimmen Sie auch die Menge L_2 der maximalen Lösungen für $x_0 > N$ mit ihrem Definitionsbereich und fertigen Sie eine grobe Skizze einer beliebigen solchen Lösung an.