Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 4 / 30. März 2009 / GG

Wahrscheinlichkeitsmaße und stochastische Variable auf $\mathbb{R}$

1. Ein harmonischer Oszillator habe zur Zeit t die Auslenkung $f(t) = A\sin\omega t$ mit $A, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$. Wird die Zeit t gleichverteilt aus dem Intervall $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ mit $T = 2\pi/\omega$ gewählt, so hat die zu dieser Zufallszeit vorliegende Auslenkung $f(t)$ die Verteilungsfunktion F_f. Zeigen Sie, dass
$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -A \\ \frac{1}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{x}{A}\right)}{\pi} & \text{für } -A \le x \le A \\ 1 & \text{für } x > A \end{cases}.$$
Zeigen Sie für die Dichte von F_f, dass $F_f'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}}$ für $-A < x < A$. Figur 1 zeigt den Fall $A = 1$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von $|f(t)|/A < 10^{-1}$ und jene von $|f(t)|/A > 1 - 10^{-1}$? Zeigen Sie für $\langle |f| \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\, dt$
$$\langle |f| \rangle = \frac{2}{\pi}A = \int_{-A}^{A} F_f'(x)\,|x|\,dx.$$

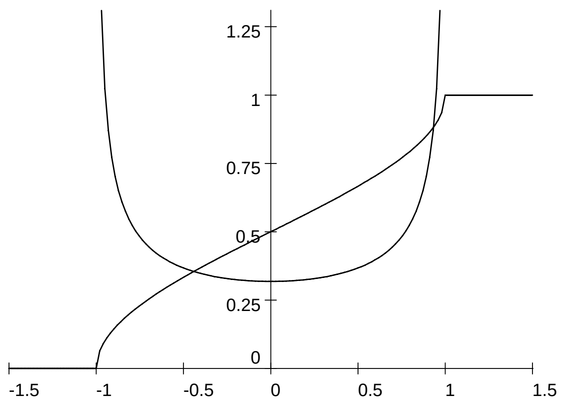

Figure 1: Verteilung und Dichte der Auslenkung

2. Die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist das W-maß W auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte $\rho(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$ für $x > 0$ und $\rho(x) = 0$ sonst.
   (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto W((-\infty, x])$. Gilt $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$? Skizzieren Sie die Graphen von F und F'.
   (b) Zeigen Sie durch Induktion nach n für den Erwartungswert der Funktion $X_n := (id_{\mathbb{R}})^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\langle X_n \rangle = n!/\lambda^n$.
   (c) Geben Sie Verteilungsfunktion $F_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Dichte F_f' des Transports W_f von W unter der Funktion $f := \sqrt{|X_1|} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an. Skizzieren Sie die Graphen von F_f und F_f'. Lösung:
$$F_f(\xi) := W_f((-\infty, \xi]) = W\left(\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|x|} \le \xi\right\}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \le 0 \\ 1 - \exp\left(-\lambda\xi^2\right) & \text{für } \xi > 0 \end{cases}.$$

3. Wird ein Körper im homogenen Schwerefeld der Erde (vertikal) nach oben geworfen, so erreicht er bei einer Startgeschwindigkeit v (unter Vernachlässigung der Luftreibung) die Steighöhe $h(v) = \frac{v^2}{2g}$. Sei nun die Startgeschwindigkeit eines solchen Körpers im Intervall $0 \le v \le v_{\max}$ gleichverteilt. Berechnen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion der Steighöhe. Zeigen Sie $\langle h \rangle = h_{\max}/3$ und $\sqrt{V(h)} \approx 0{,}298 \cdot h_{\max}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Steighöhe größer als $0{,}9 \cdot h_{\max}$ durch $1 - \sqrt{0{,}9} \approx 0{,}05$ gegeben ist.