Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 3 / 23. März 2009 / GG

Geometrische - und Poissonverteilung

1. Ein instabiler Atomkern, zerfalle unabhängig von seinem Alter in einer Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $(1-x) \in]0,1[$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er $n \in \mathbb{N}_0$ Sekunden überlebt und dann bis zum Zeitpunkt $n+1$ zerfällt, ist $p(n) := W(\{n\}) := x^n(1-x)$. Seine Lebensdauer ist also in diesem diskreten Modell geometrisch verteilt. Es ist, als würde der Kern, so lange er lebt, jede Sekunde einmal eine Münze werfen, die über sein Leben entscheidet. Wenn er zum ersten Mal „Tod" wirft, endet sein Zufallsexperiment.

   (a) Gilt $W(\mathbb{N}_0) = 1$? Skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion p von W.

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt der Kern irgendwann vor der Zeit $N+1 \in \mathbb{N}$?

   (c) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $\tau := id_{\mathbb{N}_0}$? ($\tau$ heißt Lebensdauer.) Hinweis:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2 \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   (d) Seien $M, m \in \mathbb{N}_0$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern im Intervall $M \leq n < M+m$? Welchen Wert hat die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(A \mid B) = \frac{W(A \cap B)}{W(B)}$ für $A = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < M+m\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq M\}$? Sind A und B stochastisch unabhängig?

2. Die *Poissonverteilung* zum Parameter $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der W-raum $(\mathbb{N}_0, W)$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_\delta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto \delta^n \frac{\exp(-\delta)}{n!}$. Zeigen Sie:

   (a) $W(\mathbb{N}_0) = 1, W(2 \cdot \mathbb{N}_0) = e^{-\delta} \cosh(\delta) > 1/2, W(2 \cdot \mathbb{N}_0 + 1) = e^{-\delta} \sinh(\delta)$.[1]

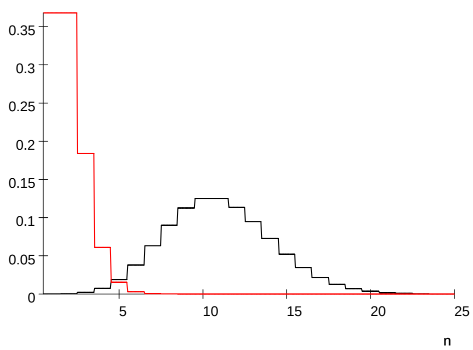
   (b) $\langle id_{\mathbb{N}_0} \rangle = \delta$.

   (c) $V(id_{\mathbb{N}_0}) = \delta$, Hinweis: differenzieren Sie b) nach δ.

   (d) Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto (-1)^n$ gilt $\langle f \rangle = e^{-2\delta}, V(f) = 1 - e^{-4\delta}$.

   (e) $\langle f \cdot id_{\mathbb{N}_0} \rangle = -\delta e^{-2\delta}$. Sind f und $id_{\mathbb{N}_0}$ unter W stochastisch unabhängig?

   Die Abbildung zeigt p_δ für $\delta = 10$ und für $\delta = 1$.



3. In einer Stadt wie Innsbruck kommen täglich im Mittel 5,5 Kinder zur Welt. Die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag $n \in \mathbb{N}_0$ Kinder geboren werden, ist dann (etwas idealisierend) poissonverteilt mit $\delta = 5,5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem bestimmten Tag mehr als 10 Kinder geboren werden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Kind geboren wird?[2]

---

[1] $2 \cdot \mathbb{N}_0 := \{2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

[2] Ersetzen Sie *Geburt* durch *Zerfall*, dann haben Sie die Poissonverteilung der Zahl der Zerfälle einer (makroskopischen) radioaktiven Probe in einer Zeitspanne, die viel kleiner als die Halbwertszeit ist.