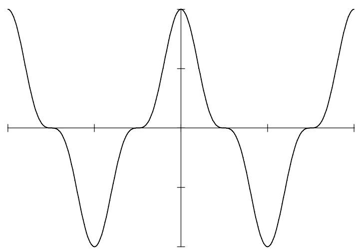
Trigonometrische Polynome, Fourierreihen

1. Rechnen Sie nach, dass die reelle Funktion $\cos^3$ das trigonometrische Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ und $a_1 = 3/4$ und $a_3 = 1/4$ ist, dass also für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{3} b_k \sin(kx)\,.$$

Hinweis: $\cos^3(x) = \left[\exp(ix) + \exp(-ix)\right]^3/8$.



$\cos^3$ auf $[0, 2\pi]$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Extrema[1] von $\cos^n(x)$ bei $x \in \pi \cdot \mathbb{Z}$, in denen $\cos^n$ abwechselnd die Werte $(\pm 1)^n$ annimmt, werden mit wachsendem n schärfer ausgeprägt, da $\lim_{n\to\infty} \cos^n(x) = 0$ für alle $x \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$. Ein Maß für die Breite[2] der Spitzen von $\cos^n$ ist $I_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x)\, dx$ = Pulsbreite / Abstand benachbarter Pulse.

   (a) Zeigen Sie

$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}. \tag{1}$$

   Hinweis: Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten c_0 von $cos^{2n}(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}$ über die binomische Formel. Es gilt dann $c_0\left[\cos^{2n}\right] = I_n$.

   (b) Verwenden Sie nun Stirlings Formel $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n = 1$, um aus Gleichung (1) abzuleiten, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n\pi}\, I_n = 1$. Mit wachsendem n wird somit die Approximation $I_n \approx 1/\sqrt{n\pi}$ immer besser. $\cos^{100}$ hat (in dieser Approximation) daher die relative Breite $I_{100} \approx 0{,}056$.

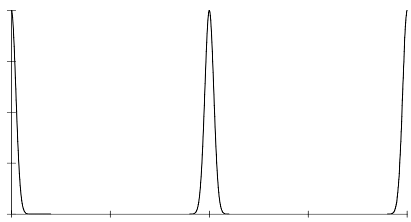


Figure 1: $\cos^{200}$ auf $[0, 2\pi]$

[1] Das „Signal" $\cos^n(\omega t)$ ist also für großes n nur in sehr kurzen Zeitfenstern um $t \in \frac{\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ merklich von 0 verschieden. Sein Fourierspektrum umfasst für (un)gerades n alle (un)geradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz ω bis hinauf zu $n\omega$. Derartige Signale werden als Taktgeber benutzt. Je schärfer das Signal sein soll, umso breiter muss sein Fourierspektrum angelegt sein. Realistische Größenordnungen bei einem Frequenzkammgenerator sind $\omega \approx 2\pi$ GHz und $n \approx 5 \cdot 10^5$.

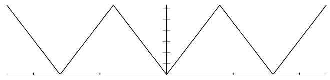
[2] Als Pulsbreite ist dabei jene Zahl δ gemeint, für die $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\, dx = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} 1 dx = \delta$ gilt.

3. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten

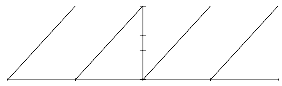
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

der folgenden 2π-periodischen Funktionen und skizzieren Sie jeweils den Graphen der Abbildung $k \mapsto |c_k|$ (Fourierspektrum).

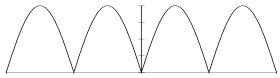
(a) $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$ (Sägezahn)



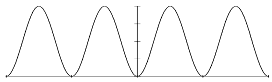
(b) $f(x) = x$ für $0 \leq x < 2\pi$ (Kippschwingung)



(c) $f(x) = \left|\sin(\frac{x}{2})\right|$ (gleichgerichteter Wechselstrom)



(d) $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$



Achtung: f ist ein trigonometrisches Polynom. Daher sind Integrationen hier unnötig.