Periodisch getriebene, schwach gedämpfte Schwingungen

1. Sei $\alpha \in (0,1)$. Dann heißt Gl. (1) parameterbereinigte, schwach gedämpfte Schwingungsgleichung

$$y'' + 2\alpha y' + y = 0. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie mittels Exponentialansatzes das Fundamentalsystem (α_1, α_2) von (1) zu den Anfangsbedingungen $\alpha_1(0) = 1, \quad \alpha_1'(0) = 0; \quad \alpha_2(0) = 0, \quad \alpha_2'(0) = 1$. Lösung: Mit $\omega = \sqrt{1-\alpha^2}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1(x) = e^{-\alpha x}\left(\cos\omega x + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega x\right) \text{ und } \alpha_2(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{\omega}\sin\omega x.$$

(b) Geben Sie die retardierte Fundamentallösung G_{ret} zu Gleichung (1) an.

(c) Zeigen Sie, dass unter allen Lösungen von Gleichung (1) nur die triviale periodisch ist.

(d) (Nur für Afficionados, da noch etwas zu schwierig) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit der Periode L. Zeigen Sie, dass unter allen Lösungen von

$$y'' + 2\alpha y' + y = f \tag{2}$$

genau eine periodisch ist. Zeigen Sie, dass diese die Periode L hat. Hinweis: Mit y ist auch das Translat $T_L y$ von y um L eine Lösung von Gleichung (2).

(e) Sei $\Omega > 0$. Ermitteln Sie mithilfe des Ansatzes $y(x) = A\cos\Omega x + B\sin\Omega x$ die (einzige) periodische Lösung von

$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = \cos\Omega x.$$

Lösung: Mit $\delta = \operatorname{arccot}\frac{1-\Omega^2}{2\alpha\Omega} \in (0,\pi)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{\cos(\Omega x - \delta)}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega)^2}}.$$

Figur 1 zeigt die Schwingungsamplitude der periodischen Lösung für $\alpha = 1/2$ (schwarz) $\alpha = 1/4$ (rot) und $\alpha = 1/10$ (grün).

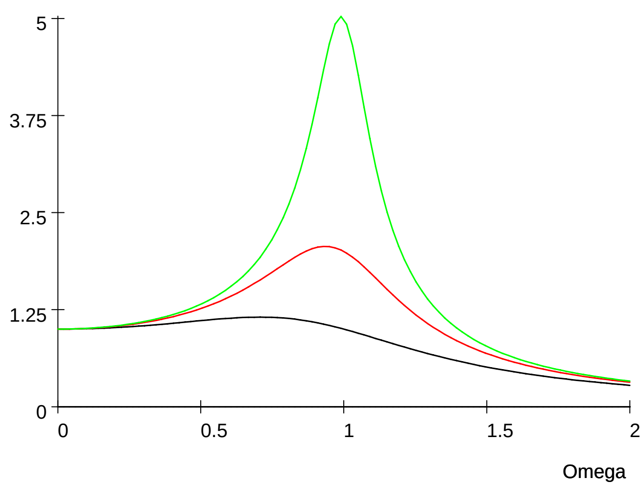

Figure 1: Amplitude der periodischen Lösung