

Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

1. Sei $\Omega = \{a, b, c\}$. Geben Sie die Potenzmenge von Ω an. Wieviele Elemente enthält sie? Geben Sie ein Beispiel für ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω .
2. Wieviele Elemente enthält die Potenzmenge einer Menge Ω , die aus n Elementen besteht?
3. In einer Schachtel sind $2n$ nummerierte Kugeln. Die Kugeln mit den Nummern $1, \dots, n$ sind rot und jene mit den Nummern $n+1, \dots, 2n$ sind grün. Es wird erst eine, und dann noch eine Kugel wahllos aus der Schachtel gezogen, ohne dass die erste zuvor in die Schachtel zurückgelegt wird.
 - (a) Zeigen Sie für den Ereignisraum Ω dieses Vorgangs $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \dots, 2n\} \text{ und } i \neq j\}$. Wieviele Elemente enthält Ω ?
 - (b) Berechnen Sie mit der Gleichverteilung W auf Ω die Wahrscheinlichkeit $W(A)$ des Ereignisses A , dass beide Kugeln dieselbe Farbe haben. Ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als $1/2$? Zeigen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} W(A) = 1/2$.
 - (c) Sei B das Ereignis, dass die zuerst gezogene Kugel rot ist, und sei C das Ereignis, dass die zweitgezogene Kugel rot ist. Sind diese beiden Ereignisse stochastisch unabhängig, d.h. gilt $W(B \cap C) = W(B)W(C)$?

4. In einem Becher sind zwei *unterscheidbare, ungezinkte Würfel*. Der Becher wird geschüttelt und auf ein Tablett geleert.
 - (a) Geben Sie für den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, W) dieses Würfelspiels die Wahrscheinlichkeitsfunktion an.
 - (b) Die Teilmenge $A \subset \Omega$ sei das Ereignis „Mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist 1 oder prim“? Welche Wahrscheinlichkeit hat A ?
 - (c) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis „Die Summe der gewürfelten Augenzahlen ist gerade“?
 - (d) $B \subset \Omega$ steht für: „Die Summe der Augenzahlen ist größer als 11“. Sind A und B stochastisch unabhängig, dh: gilt $W(A \cap B) = W(A)W(B)$?
 - (e) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto i + j$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von f :

$$\langle f \rangle_W := \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) f(\omega) =? \quad \mathcal{V}(f) := \langle f^2 \rangle_W - \langle f \rangle_W^2 =?$$

- (f) Geben Sie für den Transport¹ W_f von W mit f die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_f auf $f(\Omega)$ an. Berechnen Sie also für jedes $x \in f(\Omega)$ die Zahl $p_f(x) := W(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = x\})$. Zeigen Sie $\langle f \rangle_W = \sum_{x \in f(\Omega)} x p_f(x)$.
5. Beantworten Sie die Frage 4a) für zwei *ununterscheidbare, ungezinkte Würfel*. Liegt wie in 4a) eine Gleichverteilung vor?
6. Ein ungezinkter Würfel wird n mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten k Würfe eine 6 und die restlichen Würfe keine einzige 6 ergeben? Welcher Wert ergibt sich für $n = 600$ und $k = 100$?

¹Es gilt für jedes $A \subset f(\Omega)$ dass $W_f(A) = W(f^{-1}(A))$, wobei $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}$.