

**(Inhomogen) Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung**

- Ein Schwingkreis wird von der Spannung  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  angeregt. Der Strom  $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , der durch die Leiterschleife fließt, erfüllt  $LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = U'(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , wobei  $L, R, C \in \mathbb{R}_{>0}$ . Zeigen Sie für  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(t/\sqrt{CL}) = I(t)$  und  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $b(t/\sqrt{CL}) = CU'(t)$ , dass

$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = b(x) \tag{1}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei  $2\alpha := R\sqrt{C/L}$ .

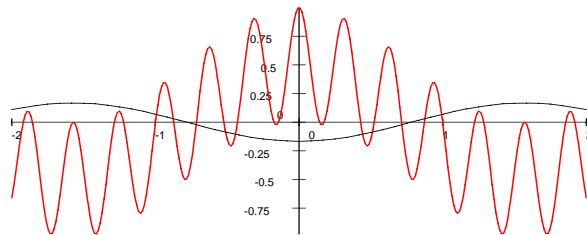
- Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Bestimmen Sie mittels Exponentialansatz ein Fundamentalsystem von (1) für  $b = 0$ . Unterscheiden Sie dabei die 3 Fälle  $0 \leq \alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$ . Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit des gefundenen Lösungspaares mit der Wronskideterminante. Hinweis: Benützen Sie den Ansatz  $y(x) = f(x)\exp(-x)$ , um für  $\alpha = 1$  eine zweite, linear unabhängige Lösung zu erhalten.
- Der Ansatz  $y(x) = A \cos(qx)$  für eine Lösung von  $y''(x) + y(x) = \cos(qx)$  auf  $\mathbb{R}$  ergibt für  $q \in \mathbb{R}$  mit  $q^2 \neq 1$  eine eindeutige maximale Lösung  $C_q$ . Für  $q^2 = 1$  funktioniert der Ansatz  $y(x) = Ax \sin(x)$ . Zeigen Sie, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$C_q(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-q^2} \cos(qx) & \text{für } q^2 \neq 1 \\ \frac{x}{2} \sin(x) & \text{für } q = \pm 1 \end{cases} .$$

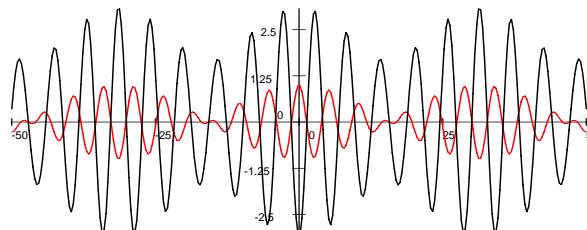
Für die Differentialgleichung  $y'' + y = g$  mit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sum_{q \in I} a_q \cos(qx)$  mit endlicher Menge  $I \subset \mathbb{R}$  und reellen Konstanten  $a_q$  ist dann  $y_g := \sum_{q \in I} a_q C_q$  eine maximale Lösung. Warum? Berechnen Sie  $y_g$  für  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \cos(q_1x) \cos(q_2x)$  mit  $q_2 > q_1 + 1 > 1$ . Hinweis:  $\cos(\alpha) \cos(\beta) = (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) / 2$ . Lösung:

$$y_g(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos((q_2 + q_1)x)}{(q_2 + q_1)^2 - 1} + \frac{\cos((q_2 - q_1)x)}{(q_2 - q_1)^2 - 1} \right)$$

Die erste Abbildung zeigt  $g$  (rot) und  $y_g$  (schwarz) für den Fall  $q_1 = 9$  und  $q_2 = 11$ . Liegt im Fall der Figur Resonanz vor? Warum überträgt sich die hochfrequente Oszillation der Inhomogenität  $g$  nicht „laut und deutlich“ auf die Lösung  $y_g$ ?



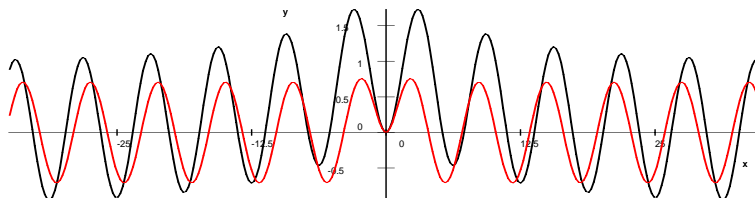
Die zweite Abbildung zeigt den Fall  $q_1 = 0, 1$  und  $q_2 = 1, 2$  einer Schwebung. Resonanz verstärkt hier die Wirkung  $y_g$  gegenüber der Ursache  $g$ .



4. Sei in Gleichung (1)  $\alpha = 0$  und  $b(x) = \exp(-\lambda|x|)$ . Die Funktion  $y$  sei die maximale Lösung von Gleichung (1) mit  $y(0) = y'(0) = 0$ . Zeigen Sie mithilfe der Lösungsformel, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2} \left( e^{-\lambda|x|} - \cos(x) + \lambda \sin|x| \right).$$

Hinweis: Es genügt den Fall  $x > 0$  zu berechnen, denn eine Symmetrie und die Eindeutigkeit der Lösung bewirken, dass  $y(-x) = y(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .



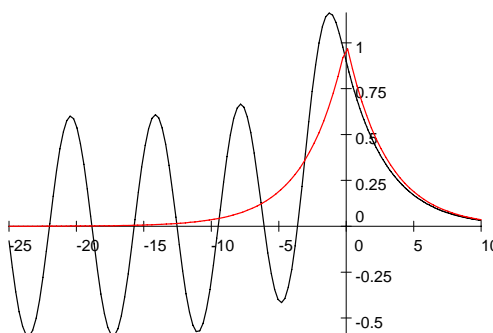
Lösung für  $\lambda = 1/10$  und  $\lambda = 1$  (rot)

Zeigen Sie, dass genau eine Lösung  $y_{av}$  von Gleichung (1) mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} y_{av}(x) = 0$  existiert. Zeigen Sie,<sup>1</sup> dass  $y_{av} = y - y_0$  mit

$$y_0(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2} \left( -\cos(x) + \lambda \sin(x) \right),$$

und dass für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$y_{av}(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2} \left[ e^{-\lambda|x|} + 2\lambda\Theta(-x) \sin|x| \right].$$



$y_{av}(x)$  und  $\exp(-\lambda|x|)$  für  $\lambda = 1/3$

<sup>1</sup> $y_{av}$  heißt avancierte Lösung. Sie schwingt, *bevor* die Inhomogenität wirkt und hört auf zu schwingen, *nachdem* die Inhomogenität gewirkt hat. Sie beschreibt das Einbremsen einer reibungsfreien Schwingung durch eine äußere Kraft. Die zeitgespiegelte Lösung  $y_{ret}(x) := y_{av}(-x)$  heißt retardierte Lösung. Sie beschreibt einen Oszillator, der erst schwingt, nachdem die äußere Kraft deutlich von 0 verschiedene Werte angenommen hat. Die elektromagnetischen Analoga von  $y_{av}$  und  $y_{ret}$  beschreiben dementsprechend Absorptions- und Ausstrahlungsvorgänge.