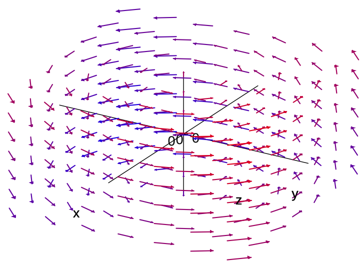
Lineare Systeme erster Ordnung

1. *3d Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit:* Sei V ein dreidimensionaler, orientierter, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Für ein festes $n \in V$ ist die Abbildung $L_n : V \to V,\quad v \mapsto n \times v$ linear. Hier bezeichnet $n \times v$ das Vektorprodukt von n mit v. (Dazu werden Skalarprodukt und Orientierung benötigt.) Sei nun $|n| = 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$.



Das Drehvektorfeld L_{e_3}

   (a) Sei $\gamma_v : \mathbb{R} \to V$ mit $\gamma_v(t) = n\langle n, v\rangle + \cos(\omega t)(v - n\langle n, v\rangle) + \sin(\omega t)\, n \times v$. Zeigen Sie, dass γ_v die maximale Lösung des Systems $\dot\gamma = \omega L_n(\gamma)$ mit $\gamma_v(0) = v$ ist. Welche Bahn hat γ_v? Hinweis: $a \times (b \times c) = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$.

   (b) Zeigen Sie $\langle n, \gamma_v(t)\rangle = \langle n, v\rangle$ und $\|\gamma_v(t)\| = \|v\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Kontrollieren Sie durch Summieren der Exponentialreihe, dass $\gamma_v(t) = (\exp(\omega t L_n))\, v$.

   (d) Bestimmen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix M von $\exp(\alpha L_n)$ bezüglich einer positiv orientierten Orthonormalbasis (e_1, e_2, n) . Zeigen Sie, dass $M^t M = I_3$ und $\det M = 1$.

   (e) Zeigen Sie für die Beschleunigung $b_v(t) := \frac{d^2\gamma_v}{dt^2}(t)$, dass $b_v(t) = -\omega^2(\gamma_v(t) - n\langle n, \gamma_v(t)\rangle)$. Es gilt also $\langle\dot\gamma_v(t), n\rangle = \langle\dot\gamma_v(t), \gamma_v(t)\rangle = \langle b_v(t), \dot\gamma_v(t)\rangle = \langle b_v(t), n\rangle = 0$.

2. *Spin-1/2-System:* Es sei V ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Für die Vektoren $e_1,\ e_2 \in V$ gelte $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ und für die lineare Abbildung $\sigma : V \to V$ gelte $\sigma e_1 = e_2$ und $\sigma e_2 = e_1$.

   (a) Zeigen Sie mittels $\sigma^2 = id$ und Aufsummieren der Exponentialreihe, dass[1]

$$\Phi : \mathbb{R} \times V \to V, \quad (t, v) \mapsto e^{(-it\sigma)} v = \cos(t)\, v - i \sin(t)\, \sigma v =: U(t)v.$$

   (b) Kontrollieren Sie $\langle U(t)v, U(t)w\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ und für alle $t \in \mathbb{R}$. (Unitarität)

   (c) Zeigen Sie $|\langle U(t)e_1, e_1\rangle|^2 = \cos^2(t)$.

3. *Bahnen der Lorentzgruppe:* Für die Abbildung $X : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ gelte

$$X : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Siefür die Menge L aller maximalen Lösungen des Systems $\dot\gamma = X(\gamma)$

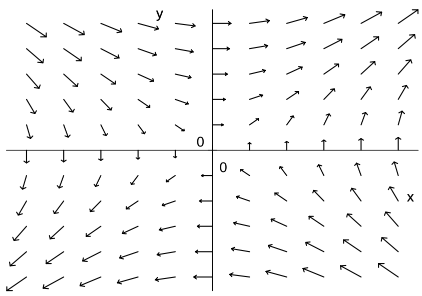
$$L = \left\{ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 1}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \right\}.$$

[1] Φ ist also der maximale Fluss des Systems $i\dot\gamma = \sigma\gamma$.

(b) Skizzieren Sie die Bahnen der maximalen Lösungen, die bei $t = 0$ durch die Punkte $(1,0)^t$, $(0,1)^t$ und $(1,1)^t$ gehen. Die Bahn durch $(1,0)^t$ ist die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die anderen Bahnen sind analog zu bilden. Ist $(0,0)^t$ in der Bahn durch $(1,1)^t$ enthalten? Bemerkung: Die Bahn durch $(0,1)^t$ ist die Weltlinie eines gleichmäßig beschleunigten relativistischen Massenpunkts. Welche Geschwindigkeit bezüglich des gewählten Koordinatensystems hat dieser Massenpunkt bei $t = 1$?



Das Vektorfeld zu X