Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 12 / 16. Juni 2008 / GG

Mittlere quadratische Approximation durch Fourierreihen; eine fastperiodische Funktion

1. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der L-periodischen Funktion f, für die $f(x) = f(-x)$ und mit $0 < \varepsilon < \frac{L}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} (\varepsilon - x)/\varepsilon^2 & \text{für } 0 \leq x < \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \leq x \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

gilt. Skizzieren Sie die Abbildung $\frac{2\pi}{L}k \mapsto |c_k|$. Wie verändert diese sich, wenn L vergrößert wird? Konvergiert ein Fourierkoeffizient c_k bei festem L für $\varepsilon \to 0$? (δ-Kamm) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Faulenzerregeln. Bestimmen Sie die mittlere quadratische Abweichung zwischen f und seinem n-ten Fourierpolynom $P_n[f]$, also

$$\|f - P_n[f]\|^2 = \frac{1}{L}\int_0^L |f(x) - P_n[f](x)|^2 \, dx,$$

für $n = 1, 2, 3$ und $L = 2\pi$ und $\varepsilon = 1$. Hinweis: $\|f - P_n[f]\|^2 = \|f\|^2 - \|P_n[f]\|^2$.

2. Seien $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_N \in \mathbb{R}_{>0}$ voneinander verschieden. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gelte mit $a_0, a_1, \ldots a_N, b_1, \ldots b_N \in \mathbb{C}$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)\right).$$

Die Funktion f ist also im Allgemeinen nicht periodisch. Zeigen Sie[1], dass für jedes $S \in \mathbb{R}$ gilt

$$a_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_S^{S+T} f(t)dt,\ a_k = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_S^{S+T} \cos(\omega_k t) f(t)dt,\ b_k = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_S^{S+T} \sin(\omega_k t) f(t)dt.$$

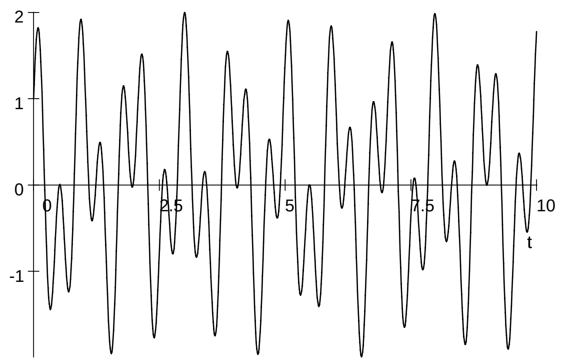

Figure 1: $\cos(2\pi t) + \sin\left(\left(1 + \sqrt{2}\right) 2\pi t\right)$

[1] Kelvin approximierte den gezeitenbhängigen Wasserstand in einem englischen Meereshafen durch eine Funktion $t \mapsto f(t)$ des obigen Typs. Aus den Aufzeichnungen während der Zeit $S < t < S+T$ ermittelte er annähernd die Konstanten $a_0, \ldots b_N$. Dabei wählte er $\omega_1 = 2\pi\frac{2}{1\,\mathrm{d}}$, $\omega_2 = \frac{2}{28\,\mathrm{d}}$, $\omega_3 = \frac{2}{365\,\mathrm{d}}$ und nahm noch die ersten paar ganzzahligen Vielfachen davon dazu. Damit konnte er f im Beobachtungszeitraum recht gut approximieren. Die Marine verließ sich auf den weiteren Verlauf der Funktion f und war mit Kelvins Prognose zufrieden. Da die Berechnungen sehr mühsam waren, erfand Kelvin gleich auch noch einen mechanischen Analogrechner, der die Fourieramplituden $a_0, \ldots b_N$ „berechnete", und einen, der den künftigen Verlauf von f auf ein Jahr im Voraus mit einer Auflösung von wenigen Minuten aufzeichnen konnte.