Periodische Randwertaufgabe; Trigonometrische Polynome, Fourierreihen

1. Seien $c \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}_{>0}$ und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei nicht die Nullfunktion. Zeigen Sie, dass die Bedingungen (i) und (ii) äquivalent sind.

   (i) Es gilt $y'' + cy = 0$ auf $\mathbb{R}$ mit $y(0) = y(L)$ und $y'(0) = y'(L)$.

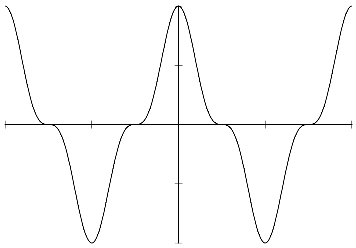
   (ii) Es existieren Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$y(x) = \alpha \cos(k_n x) + \beta \sin(k_n x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } c = k_n^2 \text{ mit } k_n = \frac{2\pi n}{L}.$$

2. Rechnen Sie nach, dass die reelle Funktion $\cos^3$ das trigonometrische Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ und $a_1 = 3/4$ und $a_3 = 1/4$ ist, dass also für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{3} b_k \sin(kx).$$

   Hinweis: $\cos^3(x) = [\exp(ix) + \exp(-ix)]^3 / 8$.



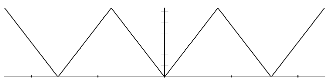
$\cos^3$ auf $[0, 2\pi]$

3. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten

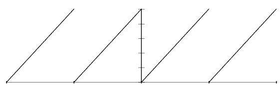
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

   der folgenden 2π-periodischen Funktionen und skizzieren Sie jeweils den Graphen der Abbildung $k \mapsto |c_k|$ (Fourierspektrum).

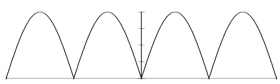
   (a) $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$ (Sägezahn)



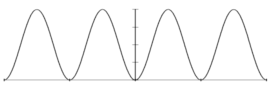
   (b) $f(x) = x$ für $0 \leq x < 2\pi$ (Kippschwingung)



   (c) $f(x) = \left|\sin(\frac{x}{2})\right|$ (gleichgerichteter Wechselstrom)



   (d) $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$



   Achtung: f ist ein trigonometrisches Polynom. Daher sind Integrationen hier unnötig.