**Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 5 / 24. April 2007 / GG**

**Gewöhnliche Differentialgleichungen:**
**1. Ordnung, getrennte Variable, lokal Lipschitzbeschränkt**

1. Für die Füllhöhe $y(t) > 0$ eines mit Wasser gefüllten Gefäßes zur Zeit $t$, das sich über ein Loch im Boden entleert, gilt mit $\alpha > 0$
$$\frac{d}{dt}y(t) = -\alpha\sqrt{y(t)}.$$
   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit
$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -\alpha\sqrt{y} \quad \text{für } \alpha > 0.$$
   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0 > 0$. Nach welcher Zeit ist das Gefäß leer?

2. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der vertikalen Bewegung im homogenen Schwerefeld (Beschleunigungskonstante $g > 0$) gilt bei linearer Reibung ($\gamma > 0$), dass $\dot{v}(t) = -g - \gamma v(t)$. Der Definitionsbereich dieser Differentialgleichung sei maximal.
   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung.
   (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $v(0) = v_0 > 0$. Hat $v(t)$ Grenzwerte für $t \to \pm\infty$?

3. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$.
   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld von $y' = f(x, y)$.
   (b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $\alpha$ dieser Differentialgleichung gilt: $\big(x^2 + \alpha^2(x)\big)' = 0$.
   (c) Bestimmen Sie die Menge $L$ der maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ genau eine maximale Lösung geht; Skizze!)
   (d) Sei $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\frac{x}{y}$. Bestimmen Sie die Menge $M$ der maximalen Lösungen von $y' = g(x, y)$. Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie: $g(x, y) = -f(x, -y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$.

4. Sei $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2}$. Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ hat das in Fig. 1 abgebildete Richtungsfeld.
   (a) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $\alpha$ dieser Differentialgleichung gilt: $\left(\frac{\alpha(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = 0$.
   (b) Bestimmen Sie die Menge $L$ der maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$. (Geben Sie zu jeder maximalen Lösung ihren Definitionsbereich an; zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau eine maximale Lösung geht; Fig. 2 zeigt einige Lösungen.)

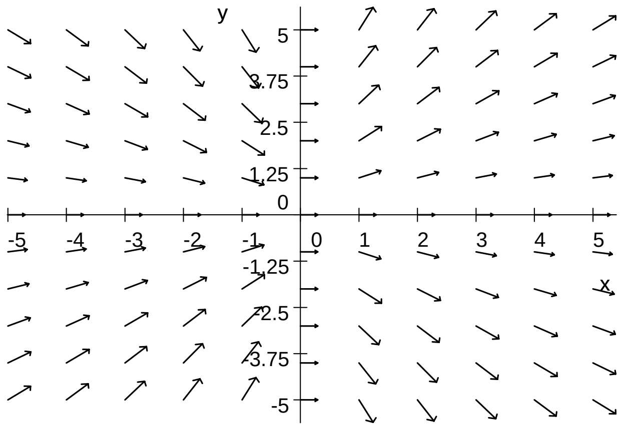


Fig. 1: Das Richtungsfeld zu Bsp. 4

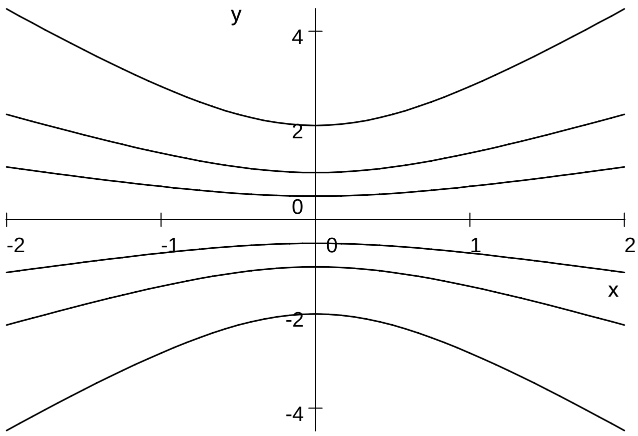


Fig. 2: Einige Lösungen zu Bsp. 4