

Wahrscheinlichkeitsmaße und stochastische Variable auf \mathbb{R}^n

1. Die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist das W-maß W auf $\Omega := \mathbb{R}_{>0}$ mit der Dichte $\rho(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$.
 - (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto W((0, x])$. Gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$? Skizzieren Sie die Graphen von F und F' .
 - (b) Zeigen Sie durch Induktion nach n für den Erwartungswert der Funktion $X_n := (id_\Omega)^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\langle X_n \rangle = n!/\lambda^n$.
 - (c) Geben Sie Verteilungsfunktion $F_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und Dichte F'_f des Transports W_f von W unter der Funktion $f := \sqrt{X_1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an. Skizzieren Sie die Graphen von F_f und F'_f . Lösung:

$$F_f(\xi) := W_f((-\infty, \xi]) = W(\{x \in \Omega \mid \sqrt{x} \leq \xi\}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda \xi^2) & \text{für } \xi > 0 \end{cases} .$$

2. Wird ein Körper im homogenen Schwerfeld der Erde (vertikal) nach oben geworfen, so erreicht er bei einer Startgeschwindigkeit v (unter Vernachlässigung der Luftreibung) die Steighöhe $h(v) = \frac{v^2}{2g}$. Sei nun die Startgeschwindigkeit eines solchen Körpers im Intervall $0 \leq v \leq v_{\max}$ gleichverteilt. Berechnen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion der Steighöhe. Zeigen Sie $\langle h \rangle = h_{\max}/3$ und $\sqrt{V(h)} \approx 0,298 \cdot h_{\max}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Steighöhe größer als $0,9 \cdot h_{\max}$ durch $1 - \sqrt{0,9} \approx 0,05$ gegeben ist.
3. Sei W die Gleichverteilung in der Kugel $K_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ mit $R > 0$.
 - (a) Geben Sie Verteilungsfunktion $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und Dichte F'_r des Transports W_r von W unter der Funktion $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ an. Lösung:

$$F_r(\xi) := W(r^{-1}((-\infty, \xi])) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \leq 0 \\ (\xi/R)^3 & \text{für } 0 < \xi < R \\ 1 & \text{für } \xi \geq R \end{cases} .$$

- (b) Zeigen Sie $\langle r \rangle_W := \int_0^\infty F'_r(\xi) \xi d\xi = 3R/4$ und $V_W(r) = 3R^2/80$.
 - (c) Welche Verteilungsfunktion F_{π_1} hat der Transport von W unter $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x$?
4. Der Abstand r zwischen Kern und Elektron eines H-Atoms ist eine reelle stochastische Variable auf \mathbb{R}^3 . Sie hat im Grundzustand die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, für die $F(x) = \int_0^x \rho(\xi) d\xi$ mit $\rho(x) = Nx^2 \exp(-x)$ und $N \in \mathbb{R}$. Hier ist der halbe Bohrsche Radius als Längeneinheit gewählt.
 - (a) $N = ?$ Hinweis: $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
 - (b) Skizzieren Sie die Graphen von F und ρ .
 - (c) $\langle r \rangle = ?, V(r) = ?$