

Die Binomialverteilung

1. Ein instabiler Atomkern sei nach Ablauf einer Zeit τ mit der Wahrscheinlichkeit $x \in [0, 1]$ zerfallen. Der W-raum (Ω, W) dieses Vorgangs ist $\Omega = \{0, 1\}$ mit dem W-maß W , für das $W(\{1\}) = x$ gilt. Die Zahl 1 steht also für das Elementarereignis „Der Kern ist zerfallen“.
 - (a) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto \omega$?
 - (b) Wenn N unterscheidbare Kerne sich gegenseitig nicht beeinflussen, hat die Frage „Welche der N Kerne zerfallen innerhalb der Zeit τ ?“ den W-raum (Ω_N, W_N) mit

$$\Omega_N := \Omega^N \text{ und } W_N(A_1 \times \dots \times A_N) := \prod_{i=1}^N W(A_i).$$

Die Zahl der in einem Elementarereignis $(\omega_1, \dots, \omega_N) \in \Omega_N$ zerfallenen Kerne wird von der stochastischen Variablen $Z_N : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Z_N(\omega_1, \dots, \omega_N) := \sum_{i=1}^N Z(\omega_i)$ angegeben. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat Z_N ? Hinweis:

$$\sum_{\alpha \in A, \beta \in B, \dots, \gamma \in C} f(\alpha) \cdot g(\beta) \cdot \dots \cdot h(\gamma) = \left(\sum_{\alpha \in A} f(\alpha) \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in B} g(\beta) \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{\gamma \in C} h(\gamma) \right)$$

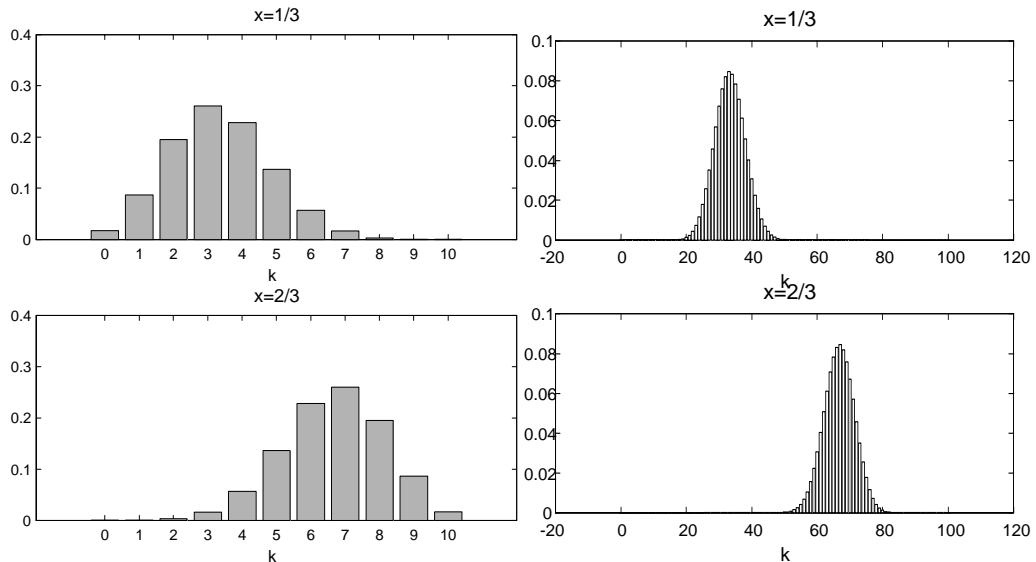
- (c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Transport von W_N mit Z_N die *Binomialverteilung* auf $\{0, 1, \dots, N\}$ ist. Es gilt für $k \in \{0, 1, \dots, N\}$

$$W_N(Z_N^{-1}(\{k\})) = Bi(k; N, x) := x^k(1-x)^{N-k} \frac{N!}{(N-k)!k!}.$$

Die Figuren zeigen $k \mapsto W_N(Z_N^{-1}(\{k\}))$ für $N = 10$ und $N = 100$ und $x = 1/3$ und $x = 2/3$. Berechnen Sie Ihr Ergebnis für Varianz und Erwartungswert von Z direkt an der Binomialverteilung. (Hinweis: In Beispiel 22 des Vorlesungsskriptums sind die Hauptüberlegungen vorgeführt.)

- (d) Sei nun $x = 10^{-3}$. Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit, dass von $N = 10^3$ Kernen innerhalb der Zeit τ mehr als 2 (bzw. 3) zerfallen? Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses.
- (e) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis für d) mit Hilfe der folgenden Ungleichung (von Chebyshev):

$$W(\{\omega \in \Omega : |f(\omega) - \langle f \rangle| \geq t\}) \leq \frac{\mathcal{V}(f)}{t^2}.$$



2. Die Wahrscheinlichkeit x , dass ein Atomkern während einer Zeitspanne der Dauer $\tau > 0$ zerfällt, ist für hinreichend kleine τ durch $\gamma\tau$ gegeben. Dabei sei $\gamma > 0$ und $\gamma\tau \ll 1$. Dies gilt unabhängig vom Alter des Kerns.

(a) Der Kern wird für ein $n \in \mathbb{N}$ über eine Zeitspanne der Dauer $n\tau$ beobachtet. Falls der Kern zerfällt, wird festgestellt, in welchem der n Teilintervalle der Dauer τ er zerfällt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt er im k -ten Zeitintervall?

(b) Zeigen Sie für die Wahrscheinlichkeit $P(t)$, dass der Kern ein Zeitintervall der beliebig großen Dauer $t > 0$ überlebt,

$$P(t) = e^{-\gamma t}.$$

Hinweis: Überlegen Sie, dass $P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{t}{n}\right)^n$.