Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 13 / 3. Juli 2007 / GG

Fourierzerlegung aperiodischer Funktionen

1. Seien $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_N \in \mathbb{R}_{>0}$ voneinander verschieden. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gelte mit $a_0, a_1, \ldots a_N, b_1, \ldots b_N \in \mathbb{C}$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos\left(\omega_k t\right) + b_k \sin\left(\omega_k t\right)\right).$$

Die Funktion f ist also im Allgemeinen nicht periodisch. Zeigen Sie[1], dass für jedes $S \in \mathbb{R}$ gilt

$$a_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \int_S^{S+T} f(t)dt,\ a_k = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \int_S^{S+T} \cos\left(\omega_k t\right) f(t)dt,\ b_k = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \int_S^{S+T} \sin\left(\omega_k t\right) f(t)dt.$$

2. Berechnen Sie die Fouriertransformierten der folgenden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen. Geben Sie auch die Funktionen a, b der sin / cos-Version der Umkehrformel an.

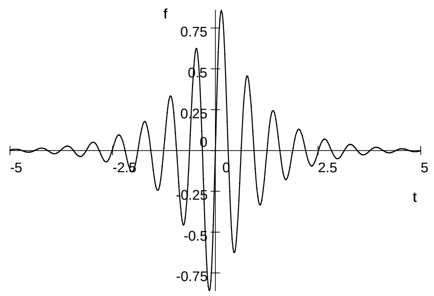
   (a) $f(x) = 1$ für $-1 < x < 1$ und $f(x) = 0$ sonst.

   (b) $g(x) = f(\frac{x-\xi}{L})$ mit f wie in a), wobei $\xi, L \in \mathbb{R}$ und $L > 0$.

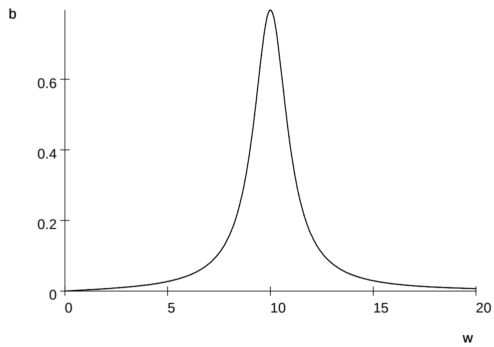
   (c) $f(x) = x$ für $-1 < x < 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Überprüfen Sie unter Verwendung von Beispiel 1a) den Teil 4) des Fouriertrafosatzes der Vorlesung.

3. Sei $f(t) = \exp(-\lambda\,|t|) \sin\left(\Omega t\right)$ für $\lambda, \Omega \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie $a = 0$ und

$$b(\omega) = 2i\left(Ff\right)(\omega) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda\Omega\omega}{\lambda^4 + 2\lambda^2\left(\omega^2 + \Omega^2\right) + \left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2}.$$



Der Graph von f für $\lambda = 1$ und $\Omega = 10$



Der Graph von b für $\lambda = 1$ und $\Omega = 10$

4. Sei f wie in Bsp.2a)

   (a) Überprüfen Sie daran Teil 1) des Fouriertrafosatzes.

   (b) Berechnen Sie die Faltung $f * f$ und überprüfen Sie Teil 2) des Fouriertrafosatzes.

[1] Kelvin approximierte den gezeitenbhängigen Wasserstand in einem englischen Meereshafen durch eine Funktion $t \mapsto f(t)$ des obigen Typs. Aus den Aufzeichnungen während der Zeit $S < t < S+T$ ermittelte er annähernd die Konstanten $a_0, \ldots b_N$. Dabei wählte er $\omega_1 = 2\pi\frac{2}{1\,\mathrm{d}}$, $\omega_2 = \frac{2}{28\,\mathrm{d}}$, $\omega_3 = \frac{2}{365\,\mathrm{d}}$ und nahm noch die ersten paar ganzzahligen Vielfachen davon dazu. Damit konnte er f im Beobachtungszeitraum recht gut approximieren. Die Marine verließ sich auf den weiteren Verlauf der Funktion f und war mit Kelvins Prognose zufrieden. Da die Berechnungen sehr mühsam waren, erfand Kelvin gleich auch noch einen mechanischen Analogrechner, der die Fourieramplituden $a_0, \ldots b_N$ „berechnete“, und einen, der den künftigen Verlauf von f auf ein Jahr im Voraus mit einer Auflösung von wenigen Minuten aufzeichnen konnte.