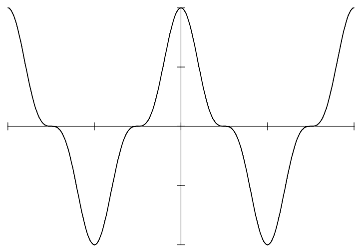
Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 11 / 19. Juni 2007 / GG

Trigonometrische Polynome, Fourierreihen

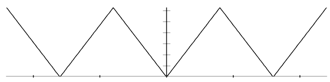
1. Rechnen Sie nach, dass die reelle Funktion $\cos^3$ das trigonometrische Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ und $a_1 = 3/4$ und $a_3 = 1/4$ ist. D.h. zeigen Sie für alle $x \in [0, 2\pi]$
$$\cos^3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{3} b_k \sin(kx).$$
Hinweis: $\cos^3(x) = [\exp(ix) - \exp(-ix)]^3 / 8$.



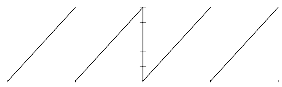
$\cos^3$ auf $[0, 2\pi]$

2. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
der folgenden 2π-periodischen Funktionen und skizzieren Sie jeweils den Graphen der Abbildung $k \mapsto |c_k|$ (Fourierspektrum).

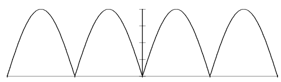
   (a) $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \le \pi$ (Sägezahn)

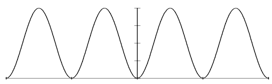
   (b) $f(x) = x$ für $0 \le x < 2\pi$ (Kippschwingung)

   (c) $f(x) = \left|\sin(\frac{x}{2})\right|$ (gleichgerichteter Wechselstrom)

   (d) $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$

   Achtung: f ist ein trigonometrisches Polynom. Daher sind Integrationen hier unnötig.

3. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der L-periodischen Funktion f, für die $f(x) = f(-x)$ und mit $0 < \varepsilon < \frac{L}{2}$
$$f(x) = \begin{cases} (\varepsilon - x)/\varepsilon^2 & \text{für } 0 \le x < \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \le x \le \frac{L}{2} \end{cases}$$
gilt. Skizzieren Sie die Abbildung $\frac{2\pi}{L}k \mapsto |c_k|$. Wie verändert diese sich, wenn L vergrößert wird? Konvergiert ein Fourierkoeffizient c_k bei festem L für $\varepsilon \to 0$? (δ-Kamm)

4. (Freiwillig) Seien $m, \omega, \omega_0, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und $F_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine periodische Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der gedämpften Schwingungsgleichung $y''(t) + 2\rho y'(t) + \omega_0^2 y(t) = F_0 \cos(\omega t)/m$. Für diese Lösung gilt für alle $t \in \mathbb{R}$
$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\rho\omega)^2}},$$

wobei $0 < \delta < \pi$ und $\cot\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\rho\omega}$. (Für jede andere maximale Lösung y gilt aufgrund der Dämpfung, dass $\lim_{t\to\infty} |y(t) - x(t)| = 0$.) Zeigen Sie, dass die am Oszillator angreifende Kraft $F_0 \cos(\omega t)$ bei Vorliegen der Lösung x eine periodengemittelte Leistung $\overline{P}$ von

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T x'(t)\, F_0 \cos(\omega t)\, dt = \frac{F_0^2}{m}\frac{\rho\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\rho\omega\right)^2} = \frac{F_0^2}{m\omega_0}\frac{\alpha q^2}{\left(1 - q^2\right)^2 + \left(2\alpha q\right)^2} > 0$$

erbringt, wobei $T = 2\pi/\omega, \alpha = \rho/\omega_0$ und $q = \omega/\omega_0$. Die Figur zeigt die Funktion $\frac{\alpha q^2}{(1-q^2)^2 + (2\alpha q)^2}$, die den Energieverbrauch regelt, für $\alpha = 1/10$ und für $\alpha = 1/5$ (rot).