

Legendresche Differentialgleichung

1. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann lautet die Legendresche Differentialgleichung für alle $x \in (-1, 1)$

$$(1 - x^2) y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes, dass jede maximale Lösung y von (1) mit $y'(0) = 0$ eine gerade Funktion ist. Zeigen Sie, dass jede maximale Lösung y von (1) mit $y(0) = 0$ eine ungerade Funktion ist. Hinweis: Zeigen Sie, dass zu jeder Lösung y auch die gespiegelte Funktion $\Pi y(x) := y(-x)$ eine Lösung von (1) ist. Welche Anfangsbedingung erfüllt Πy bei $x = 0$?

2. Nach dem Entwicklungssatz hat jede maximale Lösung von Gleichung (1) eine Potenzreihenentwicklung (2) mit einem Konvergenzradius $r \geq 1$.

$$y(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} c_k \frac{x^k}{k!} \tag{2}$$

- (a) Zeigen Sie: Ist y eine maximale Lösung von (1), dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Rekursion

$$c_{k+2} = (k(k+1) - \lambda) c_k. \tag{3}$$

- (b) Zeigen Sie: y ist ein Polynom genau dann, wenn $\lambda = n(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und wenn $\Pi y = (-1)^n y$. (Da das Legendrepolynom P_n Lösung von Gleichung (1) mit $\lambda = n(n+1)$ ist, ist nach dem Eindeutigkeitssatz der Raum der Polynomlösungen durch $\mathbb{R} \cdot P_n$ gegeben.)

- (c) Sei $\lambda = 3(3+1)$. Berechnen Sie die Polynomlösung y von Gleichung (1) mit $\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = 1$ über die Reihenformel. Überprüfen Sie, dass $y = P_3$.

- (d) Prüfen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass eine Potenzreihe (2), für deren Koeffizienten (3) gilt, tatsächlich für alle $|x| < 1$ konvergiert. Bemerkung: (Ohne Beweis) α hat genau dann eine stetige Fortsetzung nach $[-1, 1]$, wenn y ein Polynom ist.

- (e) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie für das Legendrepolynom $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n / 2^n n!$ mithilfe der Binomialreihe für $(x^2 - 1)^n$, dass

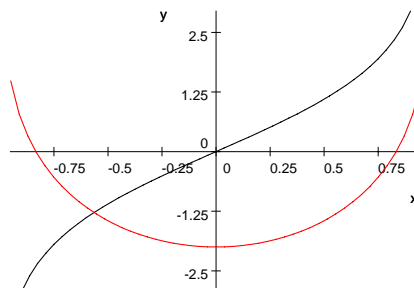
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}.$$

Überprüfen Sie daran die Rekursionsformel (3). $[n/2]$ bezeichnet das größte Ganze von $n/2$.

3. (Freiwillig) Berechnen Sie für $\lambda = n(n+1)$ mit $n = 0$ und $n = 1$ jeweils den Raum der maximalen Lösungen von Gleichung (1). Hinweis: Die Lösung P_n kann mit d'Alemberts Reduktionsverfahren zu einem Fundamentalsystem ergänzt werden. Lösung (Fig. 2):

$$L_{n=0} = \left\{ \alpha_{a,b} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a + b \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \mid a, b \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

$$L_{n=1} = \left\{ \alpha_{a,b} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b \left[x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 2 \right] \mid a, b \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$



Die Lösungen $\alpha_{0,1}$ für $n = 0$ und $n = 1$ (rot)