

**Endliche Wahrscheinlichkeitsräume**

1. Sei  $\Omega = \{a, b, c\}$ . Geben Sie die Potenzmenge von  $\Omega$  an. Wieviele Elemente enthält sie? Geben Sie ein Beispiel für ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$ .
2. Wieviele Elemente enthält die Potenzmenge einer Menge  $\Omega$ , die aus  $n$  Elementen besteht?
3. In einer Schachtel sind  $2n$  nummerierte Kugeln. Die Kugeln mit den Nummern  $1, \dots, n$  sind rot und jene mit den Nummern  $n+1, \dots, 2n$  sind grün. Es wird erst eine, und dann noch eine Kugel wahllos aus der Schachtel gezogen, ohne dass die erste zuvor in die Schachtel zurückgelegt wird.
  - (a) Zeigen Sie für den Ereignisraum  $\Omega$  dieses Vorgangs  $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \dots, 2n\} \text{ und } i \neq j\}$ . Wieviele Elemente enthält  $\Omega$ ?
  - (b) Berechnen Sie mit der Gleichverteilung  $W$  auf  $\Omega$  die Wahrscheinlichkeit  $W(A)$  des Ereignisses  $A$ , dass beide Kugeln dieselbe Farbe haben. Ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als  $1/2$ ? Zeigen Sie:  $\lim_{n \rightarrow \infty} W(A) = 1/2$ .
  - (c) Sei  $B$  das Ereignis, dass die zuerst gezogene Kugel rot ist, und sei  $C$  das Ereignis, dass die zweitgezogene Kugel rot ist. Sind diese beiden Ereignisse stochastisch unabhängig, d.h. gilt  $W(B \cap C) = W(B)W(C)$ ?
4. In einem Becher sind zwei *unterscheidbare, ungezinkte Würfel*. Der Becher wird geschüttelt und auf ein Tablett geleert.
  - (a) Geben Sie für den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, W)$  dieses Würfelspiels die Wahrscheinlichkeitsfunktion an.
  - (b) Die Teilmenge  $A \subset \Omega$  sei das Ereignis „Mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist 1 oder prim“? Welche Wahrscheinlichkeit hat  $A$ ?
  - (c) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis „Die Summe der gewürfelten Augenzahlen ist gerade“?
  - (d)  $B \subset \Omega$  steht für: „Die Summe der Augenzahlen ist größer als 11“. Sind  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig, dh: gilt  $W(A \cap B) = W(A)W(B)$ ?
  - (e) Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto i + j$ . Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $f$ :
 
$$\langle f \rangle_W := \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) f(\omega) =? \quad \mathcal{V}(f) := \langle f^2 \rangle_W - \langle f \rangle_W^2 =?$$
  - (f) Geben Sie für den Transport<sup>1</sup>  $W_f$  von  $W$  mit  $f$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_f$  auf  $f(\Omega)$  an. Berechnen Sie also für jedes  $x \in f(\Omega)$  die Zahl  $p_f(x) := W(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = x\})$ . Zeigen Sie  $\langle f \rangle_W = \sum_{x \in f(\Omega)} x p_f(x)$ .
5. Beantworten Sie die Frage 4a) für zwei *ununterscheidbare, ungezinkte Würfel*. Liegt wie in 4a) eine Gleichverteilung vor?

---

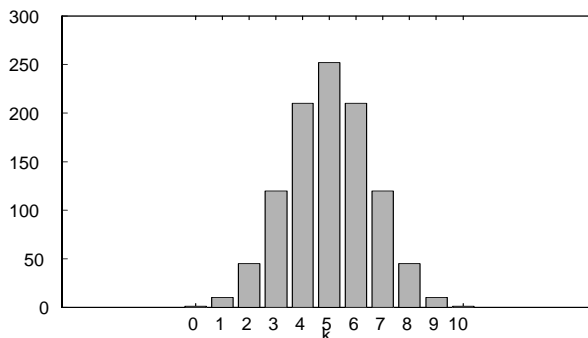
<sup>1</sup>Es gilt für jedes  $A \subset f(\Omega)$  dass  $W_f(A) = W(f^{-1}(A))$ , wobei  $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}$ .

6. Welchen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, W)$  hat *Lotto Sechs aus 45*?

*Hinweis:* Eine Ziehung ist eine injektive<sup>2</sup> Abbildung  $f : \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 45\}$ . Wieviele solche Abbildungen gibt es? Sind  $f$  und  $g$  zwei solche Abbildungen mit  $g(\{1, 2, \dots, 6\}) = f(\{1, 2, \dots, 6\})$ , dann werden sie als dasselbe Ereignis aufgefasst, da die Reihenfolge der gezogenen Zahlen ignoriert wird. Wieviele sechselementige Teilmengen hat also  $\{1, 2, \dots, 45\}$ ? Für  $N, k \in \mathbb{N}_0, k \leq N$  heißen die Zahlen

$$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Binomialkoeffizienten<sup>3</sup>. Für  $k \in \mathbb{N}$  ist  $k! := k(k-1)\dots 1$  und  $0! := 1$ . Die Figur zeigt die Binomialkoeffizienten für  $N = 10$ .




---

<sup>2</sup>Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt injektiv, falls für alle  $a, b \in X$  mit  $a \neq b$  gilt:  $f(a) \neq f(b)$ .

<sup>3</sup>Es gilt

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k y^{N-k}$$