Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 9 / 15. Mai 2006 / GG

(Inhomogen) Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

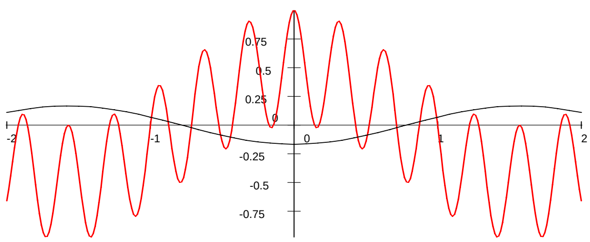
1. Ein Schwingkreis wird von der Spannung $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angeregt. Der Strom $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der durch die Leiterschleife fließt, erfüllt $LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = U'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $L, R, C \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(t/\sqrt{CL}) = I(t)$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $b(t/\sqrt{CL}) = CU'(t)$, dass
$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = b(x) \tag{1}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $2\alpha := R\sqrt{C/L}$.

2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Bestimmen Sie mittels Exponentialansatz ein Fundamentalsystem von (1) für $b = 0$. Unterscheiden Sie dabei die 3 Fälle $0 \leq \alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$. Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit des gefundenen Lösungspaares mit der Wronskideterminante. Hinweis: Benützen Sie den Ansatz $y(x) = f(x)\exp(-x)$, um für $\alpha = 1$ eine zweite, linear unabhängige Lösung zu erhalten.

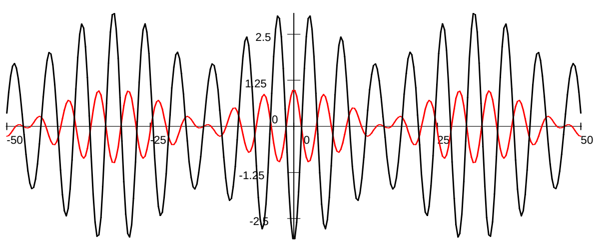
3. Der Ansatz $y(x) = A\cos(qx)$ für eine Lösung von $y''(x) + y(x) = \cos(qx)$ auf $\mathbb{R}$ ergibt für $q \in \mathbb{R}$ mit $q^2 \neq 1$ eine eindeutige maximale Lösung C_q. Für $q^2 = 1$ funktioniert der Ansatz $y(x) = Ax\sin(x)$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$C_q(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-q^2}\cos(qx) & \text{für} \quad q^2 \neq 1 \\ \frac{x}{2}\sin(x) & \text{für} \quad q = \pm 1 \end{cases} .$$

   Für die Differentialgleichung $y'' + y = g$ mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{q \in I} a_q \cos(qx)$ mit endlicher Menge $I \subset \mathbb{R}$ und reellen Konstanten a_q ist dann $y_g := \sum_{q \in I} a_q C_q$ eine maximale Lösung. Warum? Berechnen Sie y_g für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(q_1 x)\cos(q_2 x)$ mit $q_2 > q_1 + 1 > 1$. Hinweis: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))/2$. Lösung:
$$y_g(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos((q_2 + q_1)x)}{(q_2 + q_1)^2 - 1} + \frac{\cos((q_2 - q_1)x)}{(q_2 - q_1)^2 - 1}\right)$$

   Die erste Abbildung zeigt g (rot) und y_g (schwarz) für den Fall $q_1 = 9$ und $q_2 = 11$. Liegt im Fall der Figur Resonanz vor? Warum überträgt sich die hochfrequente Oszillation der Inhomogenität g nicht „laut und deutlich" auf die Lösung y_g?



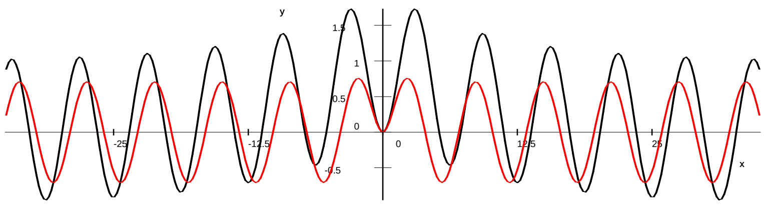
   Die zweite Abbildung zeigt den Fall $q_1 = 0,1$ und $q_2 = 1,2$ einer Schwebung. Resonanz verstärkt hier die Wirkung y_g gegenüber der Ursache g.



4. (Freiwillig) Sei in Gleichung (1) die Konstante $\alpha = 0$ und $b(x) = \exp(-\lambda |x|)$. Die Funktion y sei die maximale Lösung von Gleichung (1) mit der homogenen Anfangsbedingung $y(0) = y'(0) = 0$. Zeigen Sie mithilfe der Green'schen Lösungsformel (siehe Satz 88) für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{1}{1+\lambda^2}\left(e^{-\lambda|x|} - \cos(x) + \lambda \sin|x|\right).$$

Hinweis: Es genügt den Fall $x > 0$ zu berechnen, denn eine Symmetrie und die Eindeutigkeit der Lösung bewirken, dass $y(-x) = y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



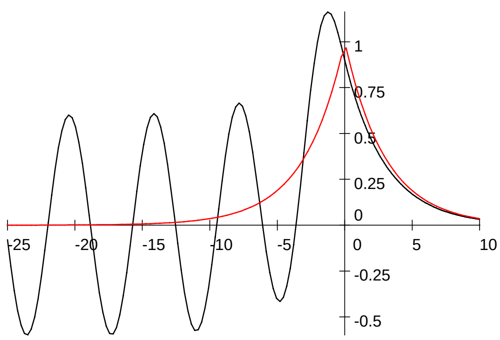
Lösung für $\lambda = 1/10$ und $\lambda = 1$ (rot)

Es existiert genau eine Lösung y_{av} von Gleichung (1) mit $\lim_{x\to\infty} y_{av}(x) = 0$. Sie entsteht aus y_{av} durch Abziehen der Lösung der homogenen Gleichung, nämlich

$$y_0(x) = \frac{1}{1+\lambda^2}\left(-\cos(x) + \lambda \sin(x)\right),$$

gegen die y_{av} für $x \to \infty$ konvergiert. Es folgt[1] für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y_{av}(x) = \frac{1}{1+\lambda^2}\left[e^{-\lambda|x|} + 2\lambda\Theta(-x)\sin|x|\right].$$



$y_{av}(x)$ und $\exp(-\lambda|x|)$ für $\lambda = 1/3$

[1] y_{av} heißt avancierte Lösung. Sie schwingt, *bevor* die Inhomogenität wirkt und hört auf zu schwingen, *nachdem* die Inhomogenität gewirkt hat. Sie beschreibt das Einbremsen einer reibungsfreien Schwingung durch eine äußere Kraft. Die zeitgespiegelte Lösung $y_{ret}(x) := y_{av}(-x)$ heißt retardierte Lösung. Sie beschreibt einen Oszillator, der erst schwingt, nachdem die äußere Kraft deutlich von 0 verschiedene Werte angenommen hat. Die elektromagnetischen Analoga von y_{av} und y_{ret} beschreiben dementsprechend Absorptions- und Ausstrahlungsvorgänge.