Übungen zu Mathematisch Methoden der Physik 1 / Blatt 8 / 8. Mai 2006
1**. Klausur**

Lösungen der Aufgaben / LH

1.
Wahrscheinlichkeitsraum bei einer Geburt: $\Omega = \{0,1\}$, wobei 1 für weiblich, 0 für männlich steht. Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω: $W(\{1\}) = x \in [0,1]$. W-raum bei N Geburten: Produktraum Ω^N mit Produktmaß. Transport: $Z_N : \Omega^N \to \mathbb{R}$ mit $(\omega_1, ..., \omega_N) \mapsto \sum_{i=1}^N \omega_i$. Transportiertes Maß unter Z_N: $(W^N)_{Z_N}(\{k\}) = x^k(1-x)^{N-k}\binom{N}{k}$ gibt Anzahl der geborenen Mädchen bei N Geburten an. (Siehe Beispiel 12 Vorlesungsskript).
a) $(W^N)_{Z_N}(\{N\}) = x^N(1-x)^{N-N}\binom{N}{N} = x^N$
b) Gefragt jetzt nach Anzahl der Jungen bei N Geburten. Es ist $W(\{0\}) = 1 - x$, ersetze also x durch $1-x$ im transportierten Maß: $(W^N)_{Z_N}^{Jungen}(\{k\}) = (1-x)^k x^{N-k}\binom{N}{k}$.
c) $(W^N)_{Z_N}(\{k \geq 2\}) = \sum_{k=2}^N x^k(1-x)^{N-k}\binom{N}{k} = 11/16$ für $x = 1/2$ und $N = 4$.

2.
a) Sei A das beschriebene Ereignis. Wegen Gleichverteilung: Wahrscheinlichkeit entspricht Fläche des Kreisrings im Verhältnis zur Fläche der Scheibe: $W(A) = [(3R/4)^2\pi - (R/2)^2\pi]/R^2\pi = 5/16$. Lösung von a) kann natürlich auch aus der Lösung von b) erhalten werden.
b) Exakt gleich wie Übungsaufgabe 3, Blatt 4, nur in einer Dimension weniger (Lösung steht sogar ordentlich auf dem Aufgabenzettel; ersetze lediglich Dimension 3 durch Dimension 2). Um Aufgabenteil a) zu lösen rechnet man $F_r(3R/4) - F_r(3R/2) = 5/16$.

3.
a) DGL vom Typ der getrennten Variablen (Definition 52) mit $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = 1/(2y)$. Da h stetig diffbar folgt Eindeutigkeit der Lösungen (Bemerkung 53). Wende Satz 54 zur Lösung der DGL an: i) h hat keine Nullstelle, also brauchen wir keine Einschränkungen von h. ii) eine Stammfunktion von $1/h$ ist $\Phi(y) = y^2$, die auf dem gesamten Def-Bereich die Umkehrfunktion $\Phi^{-1}(z) = \sqrt{z}$ besitzt. iii) Eine Stammfunktion von g ist $G(x) = \sin(x)$. iv) Die Lösung der DGL ist also laut Satz: $\alpha(x) = \Phi^{-1}(G(x) + c) = \sqrt{\sin(x) + c}$. Wegen $\alpha > 0$ muß hierbei $\sin(x) + c > 0$ sein. Der Definitionsbereich kann also für verschiedene c verschieden sein! Probe: $\alpha'(x) = \cos(x)/(2\sqrt{\sin(x)+c}) = \cos(x)/(2y)$. Für $\alpha(0) = 1/\sqrt{2}$ folgt $c = 1/2$. Die Forderung $\sin(x) + 1/2 > 0$ **und** $0 \in D_{max}$ impliziert $D_{max} =]-\pi/6, 7\pi/6[$ als maximalen Definitionsbereich (am leichtesten mit Zeichnung klarmachen!).
b) Für $\alpha(0) = \sqrt{2}$ folgt $c = 2$. Da $\sin(x) + 2 > 0$ für alle x ist der maximale Definitionsbereich $D_{max} = \mathbb{R}$.

4.
Die DGL ist inhomogen linear (Definition 58) mit $a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a(x) = 1/x$,

$b : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto b(x) = x^{1/2}$.
a) Eine Stammfunktion von a ist $A = \ln(x)$. Laut Vorlesungsskript ist die Menge der maximalen Lösungen der homogenen Gleichung $L = \{\alpha_{hom,c} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto c\exp(A) = cx | c \in \mathbb{R}\}$. Probe: $\alpha'_{hom,c}(x) = c = \alpha_{hom,c}/x$.
b) Nach Satz 59 sind die Lösungen des inhomogenen Problems auf dem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}_{>0}$ definiert und (wegen $\exp(A(x)) = x$, $\exp(-A(x)) = x^{-1}$) erhält man die Menge der max. Lösungen als $L_b = \{\alpha_c : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} | c \in \mathbb{R}\}$ mit $\alpha_c(x) = x(c + \int_s^x \xi^{-1/2} \mathrm{d}\xi) = x(c + 2x^{1/2} - 2\sqrt{s})$. Absorbiere den Summand $-2\sqrt{s}$ der Einfachkeit halber in die Integrationskonstante c, also $c \to c' = c - 2\sqrt{s}$. Die Lösungsmenge bleibt dadurch natürlich unverändert. Probe: $\alpha_{c'}(x) = (c' + 2x^{1/2}) + x^{1/2} = \alpha_{c'}/x + x^{1/2}$. Für den Anfangswert $\alpha_{c'}(1) = 1$ folgt $c' = -1$.