

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

1. Ordnung, inhomogen linear, Variation der Konstanten

- Lösen Sie Bsp. 2b) von Blatt 5 mit der Variation der Konstantenformel.
- An den Enden eines Drahtes mit dem Widerstand $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und der Selbstinduktivität $L \in \mathbb{R}_{>0}$ liege zur Zeit t die Spannung $U(t)$. Die Funktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Für die Stromstärke $I(t)$, die zur Zeit t durch den Draht fließt, gilt dann¹ (näherungsweise) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$L \frac{d}{dt} I(t) + RI(t) = U(t). \quad (1)$$

Berechnen Sie für den Fall der Quelle

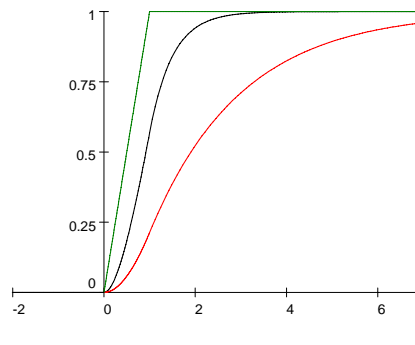
$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{U_0}{T} t & \text{für } 0 \leq t < T \\ U_0 & \text{für } T \leq t \end{cases}$$

die maximale Lösung von (1) mit der Anfangsbedingung $I(0) = 0$. Hier seien $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$. (Stetiger Einschaltvorgang)

Hinweis: Setzen Sie eine partikuläre Lösung in den Bereichen $0 \leq t < T$ und $T \leq t$ inhomogen linear an und ermitteln Sie die unbestimmten Konstanten aus der Differentialgleichung. Addieren Sie dann die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung. Lösen Sie das Problem zum Vergleich auch mit der Variation der Konstantenformel. Lösung:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ I_0 \frac{\tau}{T} (\exp(-\frac{t}{\tau}) + \frac{t}{\tau} - 1) & \text{für } 0 \leq t < T \\ I_0 (1 - \frac{\tau}{T} (\exp(\frac{T}{\tau}) - 1) \exp(-\frac{t}{\tau})) & \text{für } T \leq t \end{cases}$$

mit den Konstanten $\tau = L/R$ und $I_0 = U_0/R$. Das Bild zeigt $U(t)/U_0$ für $T = 1$ (grün) und $I(t)/I_0$ für $T = 1$ und $\tau = 1/2$ (schwarz) bzw. $\tau = 2$ (rot). Der Strom im Schaltkreis mit der höheren Induktivität baut sich also langsamer auf.



- Bestimmen Sie im Fall der Quelle

$$U(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{U_0}{T} (T - t) & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{für } T \leq t \end{cases}$$

die maximale Lösung I von Gleichung (1) zum Anfangswert $I(0) = U_0/R$. Wie in Beispiel 2) seien $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $U_0 \in \mathbb{R}$. (Stetiger Ausschaltvorgang)

Hinweis: Bezeichnen U_2 und U_3 die Inhomogenitäten der Beispiele 2) und 3), dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $U_3(t) = U_0 - U_2(t)$. Überlegen Sie, dass daher $I(t) = (U_0/R) - I_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei I_2 die maximale Lösung aus Beispiel 2) ist.

¹Siehe etwa: R Resnik, D Halliday, K S Crane, *Physics*, New York, 1992; Kap 38-3

4. Die radiale Komponentenfunktion² E_r eines kugelsymmetrischen, statischen, elektrischen Feldes ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -\frac{2y}{x} + g(x).$$

Hier ist $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. ($g = \rho/\varepsilon_0$ für die Ladungsdichte ρ .)

- (a) Zeigen Sie mit der Variation der Konstantenformel, dass für die Menge L aller maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$ gilt:

$$L = \left\{ \alpha_C : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2} \left(C + \int_0^x \xi^2 g(\xi) d\xi \right) \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (b) Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Für g gelte

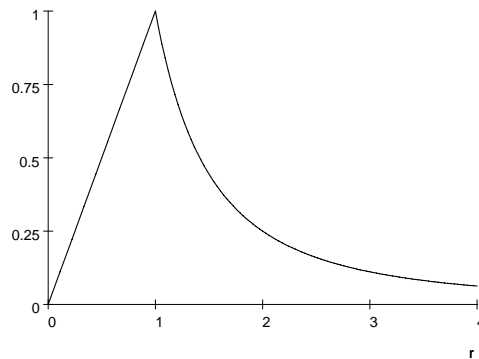
$$g(x) = \begin{cases} g_0 & \text{für } 0 < x < R \\ 0 & \text{für } R \leq x \end{cases}.$$

Zeigen Sie für die Funktion α , die wie in a) definiert ist,

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} g_0 \frac{x}{3} & \text{für } 0 < x < R \\ g_0 \frac{R^3}{3x^2} & \text{für } R \leq x \end{cases}.$$

Bemerkung: Da g unstetig ist, ist $y' = f(x, y)$ keine Differentialgleichung im Sinn der Vorlesung. Sei f_1 bzw. f_2 die Einschränkung der Funktion f auf $x < R$ bzw. $x > R$. Dann ist α die einzige stetige und beschränkte Funktion in $\text{Abb}(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$, deren Einschränkungen α_i auf $x < R$ bzw. $x > R$ maximale Lösungen der Differentialgleichungen $y' = f_i(x, y)$ sind.

Bemerkung: Im Fall einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q gilt $g_0 = 3Q/4\pi\varepsilon_0 R^3$. Die Schwerkraft, mit der die Erde an einer Masse m im Abstand r vom Erdmittelpunkt zieht, ist für $g_0 = G_N M_E m$ durch $\alpha_0(r)$ gegeben. Das Bild zeigt $3\alpha_0/g_0$ für $R = 1$.



²Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = E_r(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.