Wahrscheinlichkeitsmaße und stochastische Variable auf $\mathbb{R}^n$

1. Die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist das W-maß W auf $\Omega := \mathbb{R}_{>0}$ mit der Dichte $\rho(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$.

   (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto W((0, x])$. Gilt $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$? Skizzieren Sie die Graphen von F und F'.

   (b) Zeigen Sie durch Induktion nach n für den Erwartungswert der Funktion $X_n := (id_\Omega)^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, dass $\langle X_n \rangle = n!/\lambda^n$.

   (c) Geben Sie Verteilungsfunktion $F_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Dichte F_f' des Transports W_f von W unter der Funktion $f := \sqrt{X_1} : \Omega \to \mathbb{R}$ an. Skizzieren Sie die Graphen von F_f und F_f'. Lösung:

$$F_f(\xi) := W_f((-\infty, \xi]) = W\left(\left\{x \in \Omega \mid \sqrt{x} \le \xi\right\}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \le 0 \\ 1 - \exp\left(-\lambda\xi^2\right) & \text{für } \xi > 0 \end{cases}.$$

2. Wird ein Körper im homogenen Schwerefeld der Erde (vertikal) nach oben geworfen, so erreicht er bei einer Startgeschwindigkeit v (unter Vernachlässigung der Luftreibung) die Steighöhe $h(v) = \frac{v^2}{2g}$. Sei nun die Startgeschwindigkeit eines solchen Körpers im Intervall $0 \le v \le v_{\max}$ gleichverteilt. Berechnen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion der Steighöhe. Zeigen Sie $\langle h \rangle = h_{\max}/3$ und $\sqrt{V(h)} \approx 0,298 \cdot h_{\max}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Steighöhe größer als $0,9 \cdot h_{\max}$ durch $1 - \sqrt{0,9} \approx 0,05$ gegeben ist.

3. Sei W die Gleichverteilung in der Kugel $K_R := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2\right\}$ mit $R > 0$.

   (a) Geben Sie Verteilungsfunktion $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Dichte F_r' des Transports W_r von W unter der Funktion $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ an. Lösung:

$$F_r(\xi) := W\left(r^{-1}((-\infty, \xi])\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \le 0 \\ (\xi/R)^3 & \text{für } 0 < \xi < R \\ 1 & \text{für } \xi \ge R \end{cases}.$$

   (b) Zeigen Sie $\langle r \rangle_W := \int_0^\infty F_r'(\xi)\, \xi d\xi = 3R/4$ und $V_W(r) = 3R^2/80$.

   (c) Welche Verteilungsfunktion F_{π_1} hat der Transport von W unter $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x$?

4. Der Abstand r zwischen Kern und Elektron eines H-Atoms ist eine reelle stochastische Variable auf $\mathbb{R}^3$. Sie hat im Grundzustand die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, für die $F(x) = \int_0^x \rho(\xi) d\xi$ mit $\rho(x) = Nx^2 \exp(-x)$ und $N \in \mathbb{R}$. Hier ist der halbe Bohrsche Radius als Längeneinheit gewählt.

   (a) $N =$? Hinweis: $lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

   (b) Skizzieren Sie die Graphen von F und ρ.

   (c) $\langle r \rangle =?, V(r) =?$