Übungen zu Mathematische Methoden der Physik 1 / Blatt 3 / 20. März 2006 / GG

Gesetz der großen Zahlen; geometrische - und Poissonverteilung

1. Ein ungezinkter Würfel wird n mal geworfen. Die Funktion
$$f : \{1, \ldots 6\}^n \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\omega_1, \ldots \omega_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$
gibt den Mittelwert der Augenzahlen einer Wurffolge an. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat die Funktion f? *Lösung: der Erwartungswert ist* $7/2$ *und die Varianz ist* $35/12n$. Schätzen Sie im Fall $n = 100$ mit der Cehbyshevungleichung die Wahrscheinlichkeit ab, einen Mittelwert kleiner gleich 3 oder größer gleich 4 zu erwürfeln. *Lösung:* $W < 11,7\%$. Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat das Produkt der geworfenen Augenzahlen bei n Würfen? Lösung: der Erwartungswert ist $(7/2)^n$ und die Varianz ist $(7 \cdot 13/6)^n - (7/2)^{2n}$. Beachte: $7 \cdot 13/6 > (7/2)^2$.

2. Ein Zufallsexperiment hat die zwei möglichen Ausgänge A und B. Die Wahrscheinlichkeit des Ausganges B sei x. Wird das Experiment N mal wiederholt, dann bezeichnet N_B die Anzahl der Experimente mit Ausgang B. Die Chebyshevungleichung zur stochstischen Variable N_B gibt eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass die *Häufigkeit* des Ausgangs B, nämlich N_B/N, von x um mehr als εx abweicht. $(\varepsilon > 0)$ Berechnen Sie diese Schranke für $N = 10^{22}, x = 10^{-3}$ und $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Ein instabiler Atomkern, zerfalle unabhängig von seinem Alter in einer Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - x) \in]0, 1[$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er $n \in \mathbb{N}_0$ Sekunden überlebt und dann bis zum Zeitpunkt $n + 1$ zerfällt, ist $p(n) := W(\{n\}) := x^n(1 - x)$. (Geometrische Verteilung zum Parameter x)

   (a) Gilt $W(\mathbb{N}_0) = 1$? Skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion p von W.

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt der Kern irgendwann vor der Zeit $N + 1 \in \mathbb{N}$?

   (c) Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat $\tau := id_{\mathbb{N}_0}$? ($\tau$ heißt Lebensdauer.) Hinweis:
$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^n = x^2 \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   (d) Seien $M, m \in \mathbb{N}_0$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein Kern im Intervall $M \leq n < M + m$? Welchen Wert hat die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(A \mid B) = \frac{W(A \cap B)}{W(B)}$ für $A = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < M + m\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq M\}$? Sind A und B stochastisch unabhängig?

4. Die *Poissonverteilung* zum Parameter $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der W-raum $(\mathbb{N}_0, W)$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion
$$p_\delta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto W(\{n\}) = \frac{\delta^n \exp(-\delta)}{n!}.$$
Rechnen Sie nach:

   (a) $W(\mathbb{N}_0) = 1, W(2 \cdot \mathbb{N}_0) = e^{-\delta} \cosh(\delta) > 1/2, W(2 \cdot \mathbb{N}_0 + 1) = e^{-\delta} \sinh(\delta)$.[1]

   (b) $\langle id_{\mathbb{N}_0} \rangle = \delta$.

   (c) $V(id_{\mathbb{N}_0}) = \delta$, Hinweis: differenzieren Sie b) nach δ.

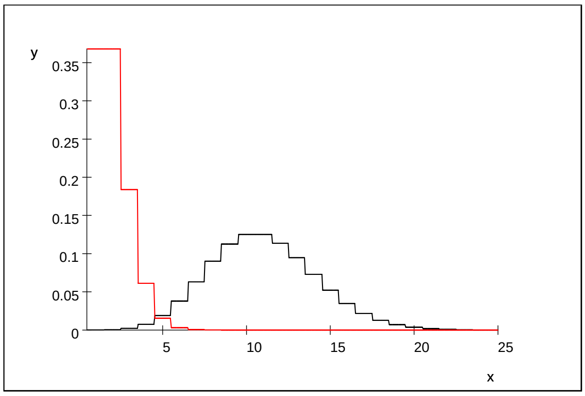
   (d) Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto (-1)^n$gilt $\langle f \rangle = e^{-2\delta}, V(f) = 1 - e^{-4\delta}$.

   (e) $\langle f \cdot id_{\mathbb{N}_0} \rangle = -\delta e^{-2\delta}$. Sind f und $id_{\mathbb{N}_0}$ unter W stochastisch unabhängig?

   Die Abbildung zeigt den Graphen von p_δ für $\delta = 10$ (durchgezogen) und für $\delta = 1$.

---

[1] $2 \cdot \mathbb{N}_0 := \{2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$


y
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
5
10
15
20
25
x